

Instabilitäten und Chaos in einem Phasenkonjugierenden Resonator

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Gerhard Reiner
aus Mieterkingen

München, den 22. 1. 1987

Instabilitäten und Chaos in einem Phasenkonjugierenden Resonator

**Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München**

**vorgelegt von
Gerhard Reiner
aus Mieterkingen**

München, den 22. 1. 1987

1. Gutachter: Prof. P. Meystre

2. Gutachter: Prof. H. Wolter

Tag der mündlichen Prüfung: 6. März 1987

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden Instabilitäten und Chaos in einem phasenkonjugierenden Resonator (PKR) untersucht. Wir entwickeln zunächst die Theorie eines PKR, in dem der phasenkonjugierende Spiegel (PKS) ein diffusives Kerr-artiges Medium und das Verhältnis von Resonatorumlaufzeit zu Reaktionszeit des Mediums beliebig ist. Sie beschränkt sich auf eine Geometrie, in der der Streuprozess der Felder im PKS im Raman-Nath Bereich liegt, aber schließt die Abschwächung der Pumpstrahlen durch die Streuprozesse voll ein. Die transversale Kopplung durch Beugung im Resonator und Diffusion im PKS ist in einer Dimension voll berücksichtigt. In einer Ebene-Wellen-Analyse finden sich als Funktion der Pumpintensität vielfache axiale stationäre Lösungen, die aber allesamt gegen transversale Störungen instabil sind. In anschließenden numerischen Simulationen von PKR'n mit träge, instantan und schnell reagierenden Medien werden zur Vereinfachung die transversalen diffusiven Effekte vernachlässigt. In Resonatoren mit trägem Medium, die Resonatorfelder mit niedriger transversaler Kopplung zulassen, finden sich zwei verschiedene Instabilitäten, die vom Anwachsen von Moden, die niedrige bzw. hohe Beugung aufweisen, herrühren. Eine zusätzliche Simulation von Resonatoren, die Lösungen mit hoher Beugung implizieren, weist darauf hin, daß der Bereich stabiler Lösungen bei der Pumpfrequenz mit der Stärke der Beugung (Modenselektion) anwächst, die von der Resonatorgeometrie vorgegeben wird. Der entgegengesetzte Fall eines PKR mit instantan reagierendem Medium zeigt generell eine Unbestimmtheit in der Phase des Resonatorfeldes, sobald dessen Amplitude eine periodische Bewegung mit geradzahlgiger Periode aufweist. In numerischen Simulationen fast konfokaler und konfokaler Konfigurationen lassen sich dann in Abhängigkeit vom Öffnungsgrad einer Blende vor dem konventionellen Endspiegel des PKR drei verschiedene Routen ins Chaos unterscheiden. Bei wenig geöffneter Blende findet sich als Funktion der Pumpintensität des PKS ein Feigenbaum-Szenario in niedrigdimensionales Chaos, dem ein kontinuierlicher Übergang zu hochdimensionalem Chaos folgt; diese Route wird detailliert mit Hilfe des Spektrums der Lyapunov-Exponenten analysiert. Öffnet man die Blende, dann bleibt zunächst das Feigenbaum-Szenario erhalten, aber der Übergang zu hochdimensionalem Chaos wird diskontinuierlich. Schließlich bricht das Feigenbaum-Szenario mit dem Erscheinen einer zweiten inkommensurablen Frequenz vorzeitig ab, und der PKR folgt einem Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario. Eine modifizierte Form dieses Szenarios, in der vor dem Einsatz von Chaos beide Frequenzen kommensurabel werden, tritt ebenfalls auf. Am Schluß

zeigt die Untersuchung eines Resonators mit einem Medium, das schnell im Vergleich zur Umlaufzeit der Felder im Resonator reagiert, daß dieser Fall nicht durch ein Modell mit instantan reagierendem Medium angenähert werden kann.

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG

- 1.1. Einführung in die Thematik
- 1.2. Durchführung und bisherige Resultate

2. DETERMINISTISCHES CHAOS

- 2.1. Grundlegende Begriffe
- 2.2. Wege ins Chaos
 - 2.2.1. Feigenbaum-Szenario
 - 2.2.2. Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario
 - 2.2.3. Dreifrequenz-Quasiperiodizität
 - 2.2.4. Kommensurable Frequenzen
 - 2.2.5. Intermittenz
- 2.3. Charakterisierung von chaotischen Attraktoren
 - 2.3.1. Dimension
 - 2.3.2. Metrische Entropie
- 2.4. Unendlichdimensionale Systeme

3. MODELL EINES PHASENKONJUGIERENDEN RESONATORS

- 3.1. Phasenkonjugierender Spiegel
- 3.2. Phasenkonjugierender Resonator
- 3.3. Experimentelle Realisierung

4. ANALYTISCHE RESULTATE

- 4.1. Axiale Moden
 - 4.1.1. Stationäre Lösungen
 - 4.1.2. Lineare Stabilitätsanalyse
- 4.2. Transversale Stabilitätsanalyse
 - 4.2.1. Formalismus
 - 4.2.2. Verhalten an der Resonatorschwelle
 - 4.2.3. Verhalten oberhalb der Resonatorschwelle

5. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: LANGSAMES MEDIUM

5.1. Resonator mit niedriger Beugung

5.2. Resonator mit hoher Beugung

6. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: INSTANTANES MEDIUM

6.1. Modellbeschreibung

6.2. Phasenunbestimmtheit

6.3. Fokussierendes Medium und kleine Apertur

6.3.1. Periodenverdopplungs-Szenario

6.3.2. Weg zu hochdimensionalen Attraktoren

6.4. Fokussierendes Medium und mittlere/große Apertur

6.5. Qualitative Diskussion der PKR-Dynamik

7. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: SCHNELLES MEDIUM

7.1. Lineare Stabilitätsanalyse

7.2. Simulation

8. ZUSAMMENFASSUNG

1. EINLEITUNG

1.1. Einführung in die Thematik

Obwohl seit den Tagen Poincaré's [1] bekannt, wurde das Phänomen chaotischer, d.h. sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängiger, deterministischer Bewegung erst in jüngster Zeit in vollem Umfang in seiner wahren Bedeutung und Anwendungsbreite erkannt. So ist Chaos in dissipativen Systemen, und auf solche wollen wir uns hier beschränken, erst seit etwa zehn Jahren Gegenstand intensiver Forschung und wurde inzwischen in vielen verschiedenen Disziplinen, von der Medizin über die Hydrodynamik bis hin zur Evolutionstheorie studiert [2]. Ein fundamentales Resultat dieser Untersuchungen ist die Einsicht, daß der Übergang ins Chaos in komplexen, hochdimensionalen Systemen derselbe ist, wie er in einfacheren niedrigdimensionalen Systemen beobachtet wird. Er läuft oft nach einem der folgenden drei Muster (Szenarien) ab, dem Periodenverdopplungs- (Feigenbaum) Szenario [3], dem Intermittenz-Szenario [4] oder dem Ruelle-Takens-Newhouse- (RTN) Szenario [5]. Als Folge hat sich die Erforschung der nichtlinearen Dynamik einfacher Systeme in der Hoffnung, über die Natur des Chaos in komplexen Systemen zu lernen, stark intensiviert. In dieser Hinsicht sind nichtlineare optische Systeme besonders vielversprechend:

(1) Sie werden, beispielsweise im Vergleich zu hydrodynamischen Systemen, mit relativ einfachen Modellen beschrieben.

(2) Sie lassen sich in einer Weise modellieren, daß sie einen oder zwei räumliche Freiheitsgrade haben, die durch einfaches Verändern von Blendendurchmessern kontinuierlich an- und abgeschaltet werden können.

(3) Die typische Dauer für ein Experiment ist sehr kurz ($\leq 1\mu\text{sec}$).

Es gibt jedoch noch einen gewissermaßen entgegengesetzten Grund, der seit dem Erscheinen des Lasers das Interesse auf optische Instabilitäten gerichtet hat: Aus dem Verständnis der Instabilitäten hofft man, diese in praktischen Lasern bzw. neuerdings auch in optisch bistabilen Elementen durch geeignetes Design vermeiden zu können. Optische Systeme sind daher sowohl theoretisch als auch experimentell intensiv studiert worden, insbesondere führen wir den homogen und inhomogen verbreiterten Laser, den Laser mit injiziertem Signal und (passive) optisch bistabile Systeme an. Eine Übersicht über die gefundene reichhaltige Phänomenologie an Instabilitäten und Wegen ins Chaos findet sich in den folgenden Referenzen: Chaotisches Verhalten im gesamten Feld der Quantenoptik wird in [6] abgedeckt, Laserinstabilitäten seit den Anfangsjahren des Lasers

sind in [7] zusammengefaßt, und im Buch von H. Gibbs [8] finden sich schließlich die Resultate für optisch bistabile Systeme.

Einige Felder haben schon eine gewisse Reife erreicht, z.B. ist Chaos in homogen verbreiteten Einzelmodelasern mittlerweile recht gut verstanden. Das Feigenbaum-Szenario und Intermittenz wurden in Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gefunden, ebenso stimmen experimentell und theoretisch ermittelte Dimensionen niedrigdimensionaler, sogenannter chaotischer Attraktoren überein [9]. Dieser Zustand ist mit Sicherheit in optisch bistabilen Systemen, zu denen auch der in dieser Arbeit untersuchte phasenkonjugierte Resonator gehört, noch nicht erreicht. Die wichtigsten (oszillatorischen) Instabilitäten, die für diese Systeme bei jeweils geeigneter Konfiguration vorhergesagt wurden, sind regenerative Pulsationen [10], Selbstpulsationen [11] und die sogenannte Ikeda-Instabilität [12]. Phänomenologisch lassen sie sich anhand der erwarteten Oszillationsgrundfrequenz unterscheiden: Regenerative Pulsationen sind durch Reaktionszeiten des Mediums charakterisiert, Selbstpulsationen sollten sich bei der inversen Resonatorumlaufzeit $\nu = 1/t_c$ finden, und Ikeda-Instabilitäten treten bei der Frequenz $1/2t_c$ auf. Alle drei Instabilitäten konnten mittlerweile experimentell nachgewiesen werden: Zuerst fanden sich regenerative Pulsationen (erster Nachweis in Ref. [10]), dann die Ikeda-Instabilität [13] - [16] und schließlich wurden Selbstpulsationen beobachtet [17]. Ring- und Fabry-Perot-Resonatoren, die eine Ikeda-Instabilität aufweisen, wurden numerisch besonders intensiv untersucht, und regelmäßig wurden Standardszenarien oder modifizierte Formen dieser Szenarien ins Chaos gefunden [8]. Die einzigen beiden Experimente allerdings, in denen Chaos klar identifiziert wurde, sind ein elektrooptisches Hybridsystem [13] und ein Glasfaserinterferometer [14]. Das hybride System ist zudem das einzige, in dem ein Standardszenario ins Chaos (Feigenbaum) eindeutig identifiziert werden konnte. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß es zumindest qualitative experimentelle Hinweise für das Vorliegen von Chaos in Fabry-Perot- und Ringresonatoren [15; 18] sowie in phasenkonjugierenden Resonatoren [19] gibt.

1.2. Durchführung und bisherige Resultate

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von Instabilitäten und Chaos in einem phasenkonjugierenden Resonator (PKR). Man erhält einen PKR, indem man in einem gewöhnlichen optischen Resonator mindestens einen Endspiegel durch einen phasenkonjugierenden Spiegel (PKS) ersetzt. Ein idealer PKS wiederum ist dadurch gekennzeichnet, daß die Wellenfronten auf den PKS einfallender monochromatischer

Felder mit denen der reflektierten Felder übereinstimmen. Diese Eigenschaft eröffnet dem PKS eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten [20]. Im Zusammenhang mit PKR'n seien hier nur zwei erwähnt: Ersetzt man in einem Laserresonator einen konventionellen Endspiegel durch einen PKS, dann lassen sich Phasenverzerrungen im Ausgangsstrahl, die von Aberrationen innerhalb des Resonators herrühren, reduzieren oder ganz beseitigen [21]. Ferner wurde kürzlich eine physikalische Realisierung eines assoziativen Gedächtnisses vorgeschlagen, die als Grundelement einen PKR enthält [22]. Es bleibt anzumerken, daß echter Phasenkonjugation immer ein nichtlinearer Prozess im PKS zugrunde liegt [23].

Unter diesen Umständen verwundert es, daß sich die theoretischen Untersuchungen der Dynamik nichtlinearer passiver optischer Resonatoren fast ausschließlich auf Fabry-Perot und Ringresonatoren beschränkt haben. Im Zusammenhang mit PKR'n wurde die Modencharakteristik des Resonators in linearisierten Modellen diskutiert [24]. Insbesondere wurden halbaxiale Moden ($\nu = 1/2t_c$) vorausgesagt [21] und auch experimentell gefunden [25]. Ferner wurden nichtlineare Analysen statischer Lösungen publiziert [26]. Die erste nichtlineare dynamische Studie wurde an einem PKR unter der Annahme, daß alle Felder ebene Wellen sind, angestellt [27] und führte zur Initiation dieser Arbeit.

Wir betrachten einen PKR, der aus einem PKS und einem konventionellen Spiegel, vor dem eine Apertur angebracht ist, besteht (siehe Fig. 3.1). Eine transversale Koordinate wird in unserem Modell explizit berücksichtigt, während die Felder in Richtung der anderen Koordinate als uniform angenommen werden. Dies ist erst der halbe Weg zu letztendlich angestrebten realistischen Simulationen, die explizit beide transversalen Dimensionen berücksichtigen würden (solche wurden unterlassen, da dann selbst beim Einsatz moderner Großrechner nur wenige Fragestellungen behandelt werden könnten), aber viele spezifisch transversale Eigenschaften realer experimenteller Situationen können in diesem Modell bereits erfaßt werden. So können Konfigurationen mit gekrümmtem konventionellem Spiegel und solche mit hoher Beugung der Felder im Resonator behandelt werden. Ferner kann mit der Änderung des Blendendurchmessers, wie in Kap. 1.1 angesprochen, die effektive Anzahl der transversalen Freiheitsgrade des Systems verändert werden. Eine wichtige Implikation der expliziten Berücksichtigung einer transversalen Koordinate ist ein unendlichdimensionaler Phasenraum des PKR. Dies erlaubt eine Untersuchung von Wegen zu hochdimensionalem Chaos, welche für den Fall eines instantan reagierenden PKS durchgeführt wird. Dabei finden wir in Abhängigkeit von der Blendenöffnung sowohl einen kontinuierlichen als auch einen diskontinuierlichen Übergang. Ein besonderes Augenmerk wird schließlich auf zwei gängige Näherungen gelegt: Eine Resonatorgeometrie, die Lösungen mit niedriger Beugung zuläßt, wird i.a.

mit einem Modell beschrieben, das alle Felder als ebene Wellen annimmt, und Konfigurationen, in denen die Reaktionszeit des Mediums kurz gegen die Umlaufzeit der Felder im Resonator ist, werden oft analysiert, nachdem die Reaktionszeit exakt zu Null gesetzt wurde (instantan reagierender PKS). Beide Näherungen werden sich im studierten PKR als fraglich erweisen.

Am besten geeignet für die Untersuchung nichtlinearer Dynamiken sind Systeme, bei denen sich die Stärke der Nichtlinearität verändern läßt. Dies läßt sich mit einem PKS mit (extern) variierbarer Verstärkung realisieren, wofür sich als einfachster Prozess die Vierwellenmischung anbietet [28]. Die meisten derartigen PKR-Experimente verwenden photorefraktive Medien im PKS. Mit ihnen lassen sich hohe Verstärkungen erzielen (≥ 100) [29], aber sie sind langsam (Reaktionszeit typischerweise $\geq 1\text{msec}$), was den interessanten Fall von gegen die Reaktionszeit des Mediums langer Umlaufzeit im Resonator ausschließt, und entscheidend, sie lassen keine numerisch effiziente Implementation zu, die für das Studium chaotischer Dynamik unentbehrlich ist. Unsere Wahl fiel auf einen Halbleiter-PKS, da Halbleiter im Hinblick auf Anwendungen in optisch bistabilen Elementen sehr intensiv untersucht werden und sich darüberhinaus unter geeigneten Umständen durch eine einfache dispersive Kerr-Nichtlinearität mit kurzer Reaktionszeit (bis zu wenigen nsec) beschreiben lassen [8]. Die Nichtlinearität rührt von elementaren Anregungen her, die starker Diffusion unterliegen, d.h. der PKR weist zwei transversale Kopplungsmechanismen auf, Beugung im leeren Teil des Resonators und Diffusion im PKS. Es bleibt anzumerken, daß die bisher erreichten phasenkonjugierten Reflektivitäten noch um mindestens den Faktor 2 - 3 gesteigert werden müssen, um die meisten Simulationen experimentell realisieren zu können (für Details siehe Kap. 3.3).

Nach der Auswahl des PKS-Mediums läßt sich ein konkretes Modell für die PKR-Dynamik ableiten. Wir entwickeln die Theorie eines PKR, in dem der PKS ein diffusives Kerr-artiges Medium [30] und das Verhältnis von Resonatorumlaufzeit zu Reaktionszeit des Mediums beliebig ist. Sie beschränkt sich auf eine Geometrie, in der der Streuprozess der Felder im PKS im Raman-Nath-Bereich liegt [31], aber schließt die Abschwächung der Pumpstrahlen durch die Streuprozesse voll ein. Die transversale Kopplung durch Beugung im Resonator und Diffusion im PKS ist auf eine Dimension eingeschränkt. Die resultierenden Gleichungen lassen sich vollständig in der resonatorseitigen Eingangsebene des PKS formulieren, d.h. die einzigen explizit auftretenden Koordinaten sind eine räumliche Dimension und die Zeit.

Bei der anschließenden Analyse der PKR-Dynamik stellt man sofort fest, daß i.a. keine analytischen Lösungen gefunden werden können. Eine Ausnahme ist ein PKR mit ebenem konventionellen Endspiegel, der Lösungen mit vernachlässigbarer transversaler

Kopplung zuläßt (breite Pumpstrahlen). Diese Lösungen breiten sich entlang der Resonatorachse aus, verhalten sich also wie axiale ebene Wellen mit transversalen Profil. Unterhalb einer Schwellenintensität der Pumpstrahlen findet sich nur die Nulllösung (kein Feld im Resonator), bei hinreichend hohen Pumpintensitäten treten dagegen gleich mehrere von Null verschiedene Lösungen auf. Physikalisch relevant sind nur die unter kleinen Störungen stabilen Lösungen. In einer linearen Stabilitätsanalyse, die nur axiale (Ebene-Wellen-artige) Störungen zuläßt, erweisen sich diese Lösungen teils als stabil, teils als instabil. Schließt man jedoch auch transversale Störungen dieses Typs mit ein, dann erweisen sich alle Lösungen als instabil. Derartige transversale Instabilitäten sind auch in Ringresonatoren [32] und Fabry-Perot-Resonatoren gefunden worden [33]. Wir müssen daraus schließen, daß die Resultate oft verwendeter einfacher Ebene-Wellen-Modelle von fraglichem Wert sind, solange keine transversalen Studien angestellt wurden. Eine Beschreibung der PKR-Dynamik muß jedenfalls transversale Effekte voll berücksichtigen.

Im weiteren Verlauf konzentriert sich die Arbeit im wesentlichen auf numerische Studien, wobei wir der Einfachheit halber keine transversalen diffusiven Effekte mehr berücksichtigt haben. Diese lassen sich durch die Verwendung von Pumpstrahlen, die breit gegen die Diffusionslänge sind, und einen hinreichend kleinen Winkel zwischen Resonatorachse und Pumpstrahlen eliminieren. Zunächst studieren wir den Fall eines trägen Mediums mit ebenem konventionellem Spiegel. In Resonatoren, die Lösungen mit niedriger Beugung zulassen (Fresnelzahl $\mathcal{F}_r = 100$), und somit näherungsweise die Bedingungen des Ebene-Wellen-Modells erfüllen, finden wir zwei Arten von Instabilitäten: In einer Konfiguration mit einem defokussierenden Medium wird eine Modulationsinstabilität nachgewiesen - dieser Instabilitätstyp wurde in der transversalen Stabilitätsanalyse erfaßt-, während in einer anderen Konfiguration mit einem fokussierenden Medium eine Instabilität auftritt, die der nichtlinearen Kopplung starker Beugung unterliegender Eigenmoden der linearisierten PKR-Gleichungen zugeschrieben wird. Eine zusätzliche Simulation von Resonatorgeometrien, die Lösungen mit hoher Beugung implizieren ($\mathcal{F}_r = 2$), weist darauf hin, daß der Bereich stabiler Lösungen bei der Pumpfrequenz mit der Stärke der Beugung (Modenselektion) anwächst, die von der Resonatorgeometrie vorgegeben wird. Bei hinreichend großer Pumpintensität (Nichtlinearität) werden diese Lösungen aber in jedem Fall instabil und die PKR-Dynamik zeigt ein Intermittenz-artiges Verhalten. Hysterese zwischen den Moden bei der Pumpfrequenz und solchen, die gegen die Pumpfrequenz verstimmt sind, findet sich ebenfalls. Schließlich scheinen PKR'n mit defokussierendem trägen Medium generell stabiler als solche mit einem fokussierenden Medium zu sein.

Als nächstes studieren wir den entgegengesetzten Fall eines PKR mit instantan reagierendem Medium, in dem sich die Dynamik auf eine diskrete Abbildung reduziert, die das Resonatorfeld aufeinanderfolgender Umläufe koppelt. Dieser Fall ist besonders interessant, da er ein numerisch sehr effizientes Studium eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden erlaubt, und, da alle Freiheitsgrade transversaler Natur sind, das Erscheinen hochdimensionaler Attraktoren eindeutig auf das Vorhandensein von (räumlicher) optischer Turbulenz hinweist. In der ersten Untersuchung eines Resonators mit instantanem Medium fand Ikeda [12] in einem Ebene-Wellen-Modell eines Ringresonators unter geeigneten Bedingungen Instabilitäten bei der Frequenz halbaxialer Moden, die heute als Ikeda-Instabilitäten bezeichnet werden. Zumindest in einem Fall folgte einer solchen Instabilität ein Feigenbaumszenario ins Chaos. Zudem fand er spontane Übergänge von periodischen zu "chaotischen" Lösungen. Wie in Kap. 1.1 schon erwähnt, ist seither in theoretischen Untersuchungen von Resonatoren mit instantanen Medien eine reichhaltige Phänomenologie an Übergängen ins Chaos nachgewiesen worden. Die Untersuchung in dieser Arbeit greift jedoch erstmals auf das Repertoire quantitativer Charakterisierungsmöglichkeiten (Lyapunov-Exponenten, Dimensionen, Entropien), im chaotischen Bereich die Voraussetzung für Vergleiche mit anderen Systeme, zurück. Unsere Simulationen wurden für eine fast konfokale und eine konfokale Anordnung, sowie fokussierendes und defokussierendes Medium mit qualitativ übereinstimmenden Ergebnissen durchgeführt. Medientyp und die Resonatorgeometrie scheinen demnach keine kritischen Parameter zu sein.

Bei geringer Blendenöffnung (hohe transversale Kopplung) findet sich als Funktion der Pumpintensität ein Periodenverdopplungsszenario ins Chaos, dem ein kontinuierlicher Übergang zu hochdimensionalen chaotischen Attraktoren folgt. Dieses Verhalten wurde auch von Farmer [34] bei der Untersuchung der Mackey-Glass- (M-G) Differentialgleichung, $dx(t)/dt = -0.1x(t) + 0.2x(t-\tau)/(1 + (x(t-\tau))^{10})$, gefunden, aber mit der Verzögerungszeit als variiertem Parameter. Seine Resultate, die den Übergang zu hochdimensionalem Chaos betreffen, wurden neuerdings in Untersuchungen eines Ringresonators in einem Ebene-Wellen-Modell bestätigt [35], wobei die Resonatorumlaufzeit als Verzögerungszeit fungiert. Beiden Wegen liegen verschiedene Mechanismen zugrunde; im hier betrachteten Fall ist transversale Kopplung allein für den hochdimensionalen Attraktor verantwortlich, während im anderen Fall als einzige Koordinate die Zeit auftritt. Um einen Vergleich anstellen zu können, wird daher der Übergang zum hochdimensionalen Attraktor in derselben Weise wie von Farmer mit Hilfe des Spektrums der Lyapunov-Exponenten analysiert. Wir finden dabei, daß beide Systeme verschiedenen Routen folgen. Zudem berechnen wir am Beispiel eines niedrigdimensionalen chaotischen Attraktors sowohl die Lyapunov-Dimension (Kaplan

und Yorke) als auch die Korrelationsdimension (Grassberger und Procaccia) und finden deutlich verschiedene Werte. Dies ist in zwei weiteren Systemen mit unendlichdimensionalem Phasenraum, der M-G-Differentialgleichung [36] und dem elektrooptischen Hybridsystem [37], auch der Fall, während sie in den Standardmodellen der Chaosuntersuchung [36], die alle einen niedrigdimensionalen Phasenraum haben, i.a. gut übereinstimmen. Diese Übereinstimmung überträgt sich offensichtlich nicht ohne weiteres auf hochdimensionale Systeme. Öffnet man die Blende (reduzierte transversale Kopplung), dann bleibt zunächst das Feigenbaum-Szenario erhalten, aber der Übergang zu hochdimensionalem Chaos wird diskontinuierlich. Schließlich bricht das Feigenbaum-Szenario mit dem Erscheinen einer zweiten inkommensurablen Frequenz vorzeitig ab und Chaos erscheint nach dem Zusammenbruch eines 1-Torus (RTN-Szenario in diskreten Abbildungen). Eine modifizierte Form dieses Szenarios, in der vor dem Einsatz von Chaos beide Frequenzen kommensurabel werden, tritt ebenfalls auf. Interessanterweise werden diese beiden Wege, die sich ebenfalls in transversalen Simulationen von Ring- und Fabry-Perot-Resonatoren finden [38], auch in hydrodynamischen Experimenten angetroffen [39].

Der PKR mit instantanem Medium hat sich für theoretische Studien von Chaos als hervorragend geeignetes Objekt erwiesen. Hier muß jedoch daran erinnert werden, daß physikalische Systeme immer eine endliche Reaktionszeit haben. In der Praxis läßt sich die Situation eines PKR mit instantanem Medium allerdings mit einem Resonator, dessen Umlaufzeit viel länger als die Reaktionszeit des Mediums ist, näherungsweise realisieren, falls keine Instabilitäten des Resonatorfeldes auf einer gegen die Umlaufzeit kurzen Zeitskala auftreten. Die prinzipielle Beobachtbarkeit der diskutierten Effekte hängt also davon ab, ob die PKR-Gleichungen diese Bedingung erfüllen. Das läßt sich nur aus der zumindestens stichprobenartigen Simulation der PKR-Dynamik für den Fall gegen die Reaktionszeit des Mediums langer Umlaufzeit der Resonatorfelder ermitteln. Die angesprochene Problematik wurde von Ikeda in einer zweiten Publikation [40], die dem Vorschlag der Ikeda-Instabilität folgte, zwar voll erkannt, allerdings hat er keinen Vergleich der beiden Fälle (instantan gegen schnell reagierendes Medium) durchgeführt. Systematische Vergleiche fehlen tatsächlich bis heute. In einer späteren Analyse eines Ringresonators mit rein dispersiver Nichtlinearität fand sich, daß einem Feigenbaum-Szenario in einem Resonator mit instantanem Medium ein Feigenbaum-Szenario korrespondierte, dessen Grundfrequenz bei der Frequenz halbaxialer Moden lag. Zusätzlich traten mit abnehmender Reaktionszeit des Mediums auch Feigenbaum-Szenarien auf, deren Grundfrequenzen ungerade harmonische Frequenzen halbaxialer Moden waren [41]. Diese wurden dann auch in einem elektrooptischen Hybridsystem experimentell demonstriert [42]. Prinzipielle Unterschiede beider Fälle wurden erst

neulich in einem Ebene-Wellen-Modell eines Ringresonator mit kombinierter nichtlinearer Absorption und Dispersion gefunden [35]. Statt dem Feigenbaum-Szenario im Fall eines instantanen Mediums fand sich ein nicht näher spezifizierter Übergang ins Chaos, der keine Periodenverdopplungen aufwies. Mit dieser Arbeit muß dem ein zweites Beispiel hinzugefügt werden. Beim Vergleich einer PKR-Konfiguration mit instantanem Medium, die ein Feigenbaum-Szenario aufwies, mit der ansonsten identischen Konfiguration, aber einem Verhältnis von zehn zu eins von Resonatorumlaufzeit zu Mediumreaktionszeit, fand sich zwar eine periodische Lösung bei der Frequenz halbaxialer Moden, die aber ohne jede Periodenverdopplung ins Chaos überging. Eine genaue Identifikation des Übergangs ließ der numerische Aufwand nicht zu, jedoch liegen Hinweise auf ein RTN-Szenario oder den Zusammenbruch eines quasiperiodischen 3-Torus vor.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kap. 2 werden zunächst die später benötigten Grundbegriffe aus der Theorie des deterministischen Chaos eingeführt. Ferner wird kurz die Problematik unendlichdimensionaler Phasenräume angeschnitten. Kap. 3 konzentriert sich dann auf die Entwicklung des PKR-Modells und diskutiert kurz dessen Realisierbarkeit. Axiale Ebene-Wellen-artige Lösungen und deren Stabilität werden in Kap. 4 untersucht. Die Kap. 5 bis 7 konzentrieren sich im wesentlichen auf die numerischen Simulationen eines PKR mit träge (5), instantan (6) und schnell (7) reagierendem Medium. Kap. 8 faßt schließlich die wichtigsten Ergebnisse nochmals zusammen und schneidet kurz die Problematik künftiger Simulationen nichtlinearer optischer Systeme an.

2. DETERMINISTISCHES CHAOS

In diesem Kapitel werden einige Begriffe und Konzepte aus der Theorie des deterministischen Chaos zusammengestellt, die zur Beschreibung der Dynamik des PKR später benötigt werden. Wir beschränken uns zunächst auf autonome, dissipative Systeme mit endlichdimensionalem Phasenraum und einem externen Parameter. Am Ende wird in Kap. 2.4 dann aufgezeigt, inwiefern hiermit auch Systeme mit unendlichdimensionalem Phasenraum erfaßt werden können. In Kap. 2.1 werden nun die grundlegenden Begriffe eingeführt, in Kap. 2.2 werden dann universelle Wege von regulärem zu chaotischem Verhalten beschrieben und in Kap. 2.3 werden einige Methoden zur Charakterisierung "chaotischer Attraktoren" behandelt.

2.1. Grundlegende Begriffe

Folgende beiden Gleichungstypen erscheinen hinreichend allgemein, um die meisten autonomen, endlichdimensionalen Systeme zu beschreiben:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_{\mu}(\mathbf{x}(t)) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_{\mu}(\mathbf{x}_n) \quad (2.2)$$

Hierbei ist $\mathbf{x}$ ein Vektor aus dem Phasenraum $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, und μ ein externer Parameter; n wird als diskrete Zeitvariable interpretiert und $\mathbf{F}_{\mu}$ und $\mathbf{f}_{\mu}$ sind hier nicht weiter spezifizierte Funktionen.

Zunächst sei bemerkt, daß kontinuierliche Dynamiken (2.1) auch mit diskreten Abbildungen (2.2) beschrieben werden können. Eine Methode ist, den Zustand $\mathbf{x}$ stroboskopisch in festen Zeitintervallen zu monitorieren und bei der n -ten Aufnahme mit $\mathbf{x}_n$ zu bezeichnen. Ferner ist die *Poincaré-Abbildung*, sofern definierbar, eine vielverwendete Methode, um die Dynamik (2.1) in Teilbereichen des Phasenraumes zu untersuchen [43]: Sie ist in Fig. 2.1 am Beispiel $m = 3$ dargestellt. Man wählt eine y -parametrisierte $(m-1)$ -dimensionale Hyperfläche H im Phasenraum von System (2.1) aus, die von jeder sie schneidenden Trajektorie immer wieder von der gleichen Seite her durchstoßen wird. Man erhält dann eine (invertierbare) Abbildung der Form (2.2) auf H ,

wenn man zwei aufeinanderfolgende derartige Durchstoßpunkte mit y_n bzw. y_{n+1} bezeichnet.

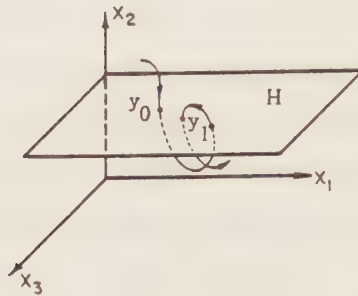


Fig. 2.1: Poincaré -Abbildung in einem dreidimensionalen Phasenraum.

Wie erwähnt, beschränken wir uns in Kapitel 2 auf dissipative Systeme. Im Falle einer kontinuierlichen Dynamik (2.1) kontrahiert der Fluß im Phasenraum im Laufe der Zeitentwicklung Volumenelemente und man erwartet, daß sich eine Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ im Limit $t \rightarrow \infty$ auf einem "Attraktor", der nur einen verschwindenden Teil des Phasenraumes einnimmt, bewegt. Die Beschreibung dieser Systeme vereinfacht sich enorm, wenn man sich, nach der transienten Phase, auf die Analyse der Dynamik auf dem Attraktor beschränkt. Es gibt nun keine allgemein als angemessenste akzeptierte mathematische Fassung des Begriffes Attraktor [43, S. 256-259; 44, S. 644]; für die Zwecke dieser Arbeit ist folgender Standpunkt ausreichend: Ein *Attraktor* A ist eine kompakte Teilmenge des Phasenraumes mit einer offenen Umgebung U , in der *fast jeder* Anfangszustand $\mathbf{x}(0) \in U$ im Limit $t \rightarrow \infty$ bzw. $n \rightarrow \infty$ auf A führt. Die auf A konvergenten Trajektorien sollen jedem Punkt auf A immer wieder beliebig nahekommen. Das *Basin* von A setzt sich aus der Menge aller Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$, die auf A führen, und dem Rand dieser Menge zusammen. Häufig finden sich gleichzeitig mehrere Attraktoren im Phasenraum. Man spricht dann von *koexistierenden* Attraktoren. In der Definition des Attraktors ist die in der Chaostheorie regelmäßig wiederkehrende Phrase "fast jeder" verwendet worden. *Fast jeder* bedeutet hier, daß die Anfangszustände in U , die nicht auf A führen, vom Lebesque-Maß Null sind. Ganz allgemein verwendet man *fast* aber auch *generisch* in Aussagen, die auch Ausnahmen zulassen, welche man aber für irrelevant hält, weil sie in einem geeignet erscheinenden Maß das Maß Null haben.

Eine gemeinsame Eigenschaft wird, in Übereinstimmung mit allen untersuchten Fällen, der Dynamik auf allen Attraktoren zugeschrieben [45]: Ergodizität. Genau wie in der Thermodynamik versteht man darunter, daß die Werte zeitgemittelter Größen, die aus

der langen Beobachtung eines Systems (generische Trajektorie) gewonnen werden, sich auch aus der gleichzeitigen Beobachtung eines statistischen Ensembles von Systemen gewinnen lassen. Oder anders formuliert: Auf lange Sicht sind generische Trajektorien ununterscheidbar.

Ein Attraktor A kann mittels einer Abbildung $g_m: R^m \rightarrow R^{m'}$ als $A' = g_m(A)$ in $R^{m'}$ eingebettet werden. Eine Einbettung wird man bzgl. einer Größe als gut bezeichnen, wenn die Größe auf A und A' denselben Wert annimmt. Alle bisherigen Untersuchungen zeigen, daß man im allgemeinen gute Einbettungen bzgl. der in Kapitel 2 definierten Größen erhält, falls $m' \geq m_0 = 2 D_0 + 1$ erfüllt ist. D_0 ist dabei die in Kapitel 2.3 eingeführte Kapazität von A . Der spezielle Wert von m_0 leitet sich, von in ihrer Aussage allerdings wesentlich schwächeren, mathematischen Theoremen her [45]. Es sei angemerkt, daß sich viele Attraktoren sogar gut im Falle $m' < m_0$ darstellen lassen, z.B. reicht für eine geschlossene Linie $m' = 2$ aus, während $m_0 = 3$ ist.

Ein quantitatives Kriterium für *Chaos*, das bisher dadurch beschrieben wurde, daß die Entwicklung eines chaotischen Systems "sensitiv" von den Anfangsbedingungen abhängt, erhält man aus dem Studium des Verhaltens benachbarter Trajektorien. Dies läßt sich studieren, wenn man die zeitliche Entwicklung einer Kugel mit infinitesimalem Radius $\epsilon(0)$ zur Zeit $t=0$ ($n=0$) verfolgt. Ihre Form wird sich i.a. zu einem Ellipsoid deformieren. Ist $\epsilon_i(t(n))$ die Länge der i -ten Hauptachse zur Zeit t (nach der n -ten Iteration), dann ist das *Spektrum der Lyapunov-Exponenten* λ_i der Trajektorie im Zentrum des Ellipsoids gegeben durch

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t(n)} \ln \left(\frac{\epsilon_i(t(n))}{\epsilon(0)} \right). \quad (2.3)$$

Existiert das Spektrum für fast alle Trajektorien aus dem Basin von A und ist identisch, dann wird es einer Eigenschaft von A zugeschrieben und als Spektrum der Lyapunov-Exponenten von A bezeichnet. Seine Existenz konnte von Oseledec für ergodische Systeme bewiesen werden [46]. Ganz allgemein messen die positiven Lyapunov-Exponenten das exponentielle Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien auf dem Attraktor, während die negativen die exponentielle Konvergenz von Trajektorien auf den Attraktor messen. Einen Attraktor bezeichnet man nun als *chaotisch*, wenn wenigstens einer seiner Lyapunov-Exponenten größer als Null ist. Es sei angemerkt, daß chaotische kontinuierliche Systeme (2.1) einen mindestens dreidimensionalen Phasenraum haben: Im Falle eines zweidimensionalen Phasenraumes schließt das Poincaré-Bendixon-Theorem Chaos aus [43]; der eindimensionale Fall ist trivial.

2.2. Wege ins Chaos

Hier konzentrieren wir uns auf die Frage, wie sich ein Attraktor ändert, wenn man den externen Parameter μ variiert (o.B.d.A. vergrößert). Vergrößert man μ , dann ändert sich der Attraktor i.a. stetig, bis an einem *Bifurkationspunkt* μ_1 sich seine topologische Struktur plötzlich ändert, z.B. ein Fixpunkt in ein periodisches Orbit übergeht. Dieser Bifurkation folgen i.a. weitere Bifurkationen. Im Prinzip besteht eine unendliche Zahl von möglichen Bifurkationssequenzen, aber tatsächlich findet man in Experimenten in allen Disziplinen der Naturwissenschaft und in Studien verschiedener Gleichungen einige wenige Bifurkationssequenzen, die alle auf chaotischen Attraktoren enden, wiederholt vor. Die wichtigsten dieser sogenannten *universellen Wege ins Chaos* oder *Szenarien* werden im folgenden eingeführt. Schöne experimentelle Verifikationen sind in den Refn. [39] und [47] beschrieben.

2.2.1. Feigenbaum-Szenario

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Systeme vom Typ (2.1) durch eine Poincaré-Abbildung beschrieben seien; dann können wir uns auf Abbildungen vom Typ (2.2) beschränken. Das typische Verhalten im Falle eines *Feigenbaum-Szenarios* ist in Fig. 2.2 dargestellt. Man startet auf einem Fixpunktattraktor (im Falle einer k -periodischen Bewegung betrachte man die k -te Iterierte von f_μ). Erhöht man μ , dann durchläuft das System eine Sequenz von Periodenverdopplungen an Punkten μ_n , bis man am Punkt μ_∞ ein Orbit mit "Periode 2^∞ " findet. Jenseits von μ_∞ findet man chaotische Attraktoren, die von Bereichen mit stabilen periodischen Orbits, sogenannten *periodischen Fenstern* unterbrochen werden. Im Sinne einer inversen Bifurkationssequenz vereinigen sich an den Punkten μ_n' jeweils 2 disjunkte Blätter des chaotischen Attraktors zu einem Blatt. Beide Sequenzen $\mu_1, \mu_2, \dots$ und $\mu_1', \mu_2', \dots$ genügen dem Skalierungsgesetz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+2}^{(\cdot)} - \mu_{n+1}^{(\cdot)}}{\mu_{n+1}^{(\cdot)} - \mu_n^{(\cdot)}} = \delta, \quad (2.4)$$

wobei

$$\delta = \delta_{\text{Fb}} = 4.66... \quad (2.5)$$

eine universelle Konstante für alle generischen dissipativen Systeme ist [48]. Nebst δ_{FB} ist die Anhäufung der Periodenverdopplungen am Punkt $\mu_\infty = \mu_\infty'$ mit weiteren Skalierungskonstanten und kritischen Exponenten verknüpft. Diese sind in allen generischen dissipativen Systemen identisch. Das ließ sich in zwei Schritten verstehen:

Zunächst hat Feigenbaum [49] im Rahmen einer erfolgreichen Anwendung eines Renormalisierungsprogramms erkannt, daß sich alle generischen eindimensionalen Abbildungen in der Umgebung von μ_∞ gleich verhalten (generisch bedeutet hier, daß f_μ in Gleichung (2.2) nur quadratische Extrema hat). Im zweiten Schritt haben Eckmann, Collet und Koch [50] die Renormalisierungstheorie auf multidimensionale dissipative Systeme verallgemeinert und gefunden, daß sich diese Systeme im Falle eines Feigenbaumszenarios in der Umgebung von μ_∞ eindimensional verhalten. Der Unterschied zwischen verschiedenen Systemen und insbesondere zwischen Systemen mit ein- und multidimensionalem Phasenraum tritt am deutlichsten im chaotischen Bereich hervor und zwar umso stärker, je niedriger die Bifurkationsordnung.

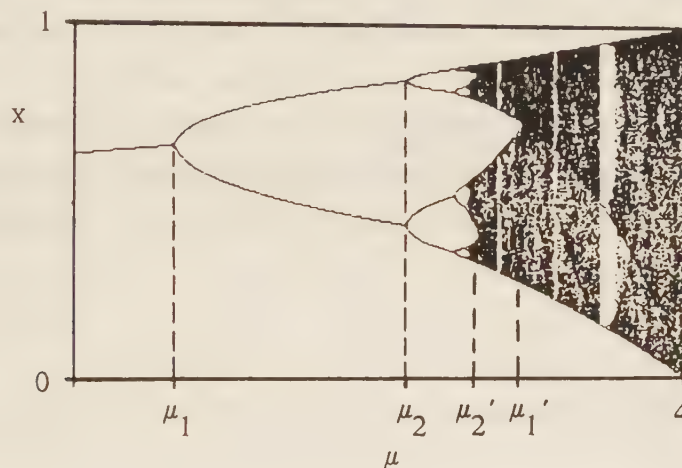


Fig. 2.2: Attraktoren der logistischen Parabel-Abbildung $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$ als Funktion von μ .

2.2.2. Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario

Das Ruelle-Takens-Newhouse- (RTN) Szenario ist für kontinuierliche Dynamiken (2.1) formuliert, kann aber leicht auf diskrete (2.2) übertragen werden. Es verwendet den Begriff der *Hopf-Bifurkation*, unter der man den Übergang eines n -Torus-Attraktors mit n inkommensurablen Frequenzen in einen $(n+1)$ -Torus-Attraktor mit $n+1$

inkommensurablen Frequenzen versteht. Ein RTN-Szenario liegt vor, wenn ein zunächst stationäres System nach zwei Hopf-Bifurkationen, statt mit einer weiteren Hopf-Bifurkation auf einen 3-Torus mit 3 inkommensurablen Frequenzen, auf einen chaotischen Attraktor bifurkiert. Die Existenz des Szenarios wird mit einem Theorem von RTN (1978, [5]) in Zusammenhang gebracht: Sie haben gezeigt, daß im Raum zweimal stetig differenzierbarer (C^2) Funktionen, jede Funktion F , die in Gl. (2.1) einen 3-Torus Attraktor mit 3 inkommensurablen Frequenzen aufweist, auf dem Rand einer offenen Menge von Funktionen F' liegt, die stattdessen einen chaotischen Attraktor haben. Dieses Theorem schließt offensichtlich andere als das RTN-Szenario nicht aus:

2.2.3. Dreifrequenz-Quasiperiodizität

In der Tat fand sich numerisch [51] und experimentell [52] auch der Fall, daß erst nach 3 Hopf-Bifurkationen, also nach dem Erscheinen einer dritten Frequenz, eine Bifurkation auf einen chaotischen Attraktor auftrat. Dies könnte aus zwei Gründen mit dem RTN-Theorem verträglich sein. Die Bewegung auf dem 3-Torus mag gegen C^∞ -Störungen der Funktion F , welche man in physikalischen Systemen eigentlich nur erwartet, stabil sein, aber dennoch instabil gegen die größere Klasse von C^2 -Störungen. Zudem besteht noch die Möglichkeit, daß die Funktionen F' mit chaotischen Attraktoren maßtheoretisch irrelevant sind.

2.2.4. Kommensurable Frequenzen

Eine weitere Variante zum RTN-Szenario erhält man, wenn statt der Bifurkation auf einen 3-periodischen oder einen chaotischen Attraktor, die beiden inkommensurablen Frequenzen zunächst über einen endlichen Bereich von μ kommensurabel werden und dann eine Bifurkation auf einen chaotischen Attraktor auftritt [53].

2.2.5. Intermittenz

Mit Intermittenz bezeichnet man Situationen, wenn lange reguläre (hier periodische oder quasiperiodische) Phasen mit kurzen Phasen komplizierter Dynamik zufällig abwechseln (siehe Fig. 2.3) [4]. Ein intermittentes Szenario von regulärer Bewegung ins Chaos startet mit streng regulärer Bewegung. Wird μ vergrößert, dann tritt Intermittenz

mit abnehmender Länge der regulären Phasen auf, bis diese schließlich vollständig verschwinden. Intermittenz erlaubt also einen kontinuierlichen Übergang von regulärem zu chaotischem Verhalten. Die Reichhaltigkeit des Phänomens sieht man daran, daß schon in eindimensionalen Abbildungen (2.2) drei verschiedene Typen von Intermittenz auftreten, die alle mit der Kollision von stabilen und instabilen periodischen Orbits verknüpft sind [39].

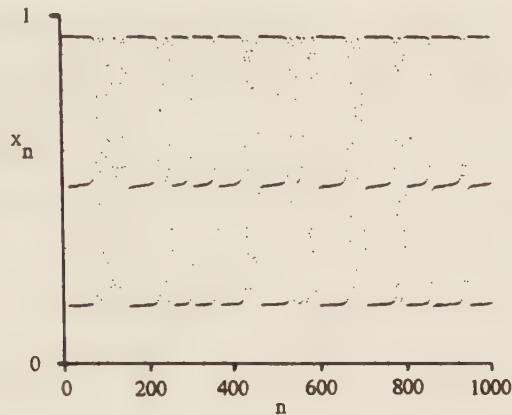


Fig. 2.3: x_n aus Fig. 2.2 ist nahe dem P3-Fenster als Funktion von n aufgetragen. Die Figur illustriert die Intermittenz beim Erscheinen dieses Fensters.

2.3. Charakterisierung von chaotischen Attraktoren

Als wichtigste Größen, um die geometrischen und statistischen Eigenschaften eines chaotischen Attraktors zu charakterisieren, haben sich Dimension, metrische Entropie und das in Kapitel 2.1 schon eingeführte Spektrum der Lyapunov-Exponenten, erwiesen. Ihre in diesem Kapitel angegebenen Definitionen orientieren sich an den Verfahren, mit denen sie in Simulationen und Experimenten üblicherweise bestimmt werden. Diese gründen i.a. auf der langen Beobachtung einer oder weniger Trajektorien. Die Ergodizität der Dynamik auf Attraktoren garantiert dabei, daß die Ergebnisse unabhängig von der gewählten Trajektorie sind; umgekehrt ist die gefundene Unabhängigkeit von der gewählten Trajektorie auch Beleg für die Richtigkeit der Ergodizitätshypothese.

2.3.1. Dimension

Die relevanten Dimensionsdefinitionen können in zwei Klassen eingeteilt werden: Solche die nur von den metrischen Eigenschaften des Attraktors abhängen und solche, die von der Häufigkeit abhängen, mit der generische Trajektorien verschiedene Bereiche des Attraktors besuchen. Eine Übersicht über verschiedene Definitionen findet man in Ref. [54]; dort wird anhand der bisherigen Forschungsergebnisse geschlossen, daß für typische Attraktoren alle Dimensionen innerhalb einer Klasse gleiche Werte annehmen. Hier wird nur der markanteste Vertreter jeder Gruppe eingeführt, die Kapazität D_0 und die Informationsdimension D_1 . Beide sind Spezialfälle verallgemeinerter Renyi-Dimensionen D_q , $q \in \mathbb{R}$, die von Grassberger, Procaccia und Hentschel [55] erstmals im Kontext chaotischer Attraktoren verwendet wurden. Diese nehmen i.a. von D_0 und D_1 verschiedene Werte an und erweisen sich zunehmend als geeignete Größen zur systematischen Charakterisierung inhomogener Attraktoren [56].

Ist $N(\epsilon)$ die minimale Anzahl von Würfeln mit Kantenlänge ϵ , die benötigt werden, um den Attraktor im Phasenraum $\mathbb{R}^m$ zu überdecken, dann ist die Kapazität D_0

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} . \quad (2.6)$$

Wichtig an dieser Definition ist, daß jeder Würfel, der einen Teil des Attraktors enthält, gleich stark zählt, unabhängig davon, wie oft er von einer generischen Trajektorie besucht wird. Oft werden aber auf Attraktoren einzelne Teile mit sehr unterschiedlicher Häufigkeit besucht [54]. Selten besuchte Teile wird man in Computersimulationen oder Experimenten infolge der beschränkten Beobachtungszeit i.a. nicht sehen. Dem trägt die Informationsdimension D_1 Rechnung und macht sie zur relevanteren Größe. Ist A mit $N(\epsilon)$ Würfeln der Kantenlänge ϵ überdeckt und $p(i)$ die Wahrscheinlichkeit mit der man eine generische Trajektorie im i -ten Würfel dieser Überdeckung findet, dann ist

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1/\epsilon)} \left(\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} -p(i) \ln(p(i)) \right) . \quad (2.7)$$

Zunächst sei bemerkt, daß $D_1 \leq D_0$. Die Gleichheit ist auf den Fall, daß alle Würfel gleiche Wahrscheinlichkeit $p(i) = 1/N(\epsilon)$ haben, beschränkt. Ein weiteres Indiz für die Relevanz der Dimension D_1 ist ihre Interpretation: In der Informationstheorie ist der

Summenausdruck in Gl. (2.7) gerade die Menge an Information, die benötigt wird, um den Zustand des Systems mit der Genauigkeit ϵ anzugeben [57]. Für kleine ϵ besagt D_1 also, wie schnell mit abnehmendem ϵ die Information anwächst, die benötigt wird, um einen Punkt auf dem Attraktor zu spezifizieren.

Eine Schwäche beider Dimensionen D_0 und D_1 ist, daß sie nur für kleine Werte bestimmt werden können: Ihre numerische Berechnung erfordert, die Umgebung des Attraktors mit Würfeln der Kantenlänge ϵ zu überdecken und ϵ sukzessive zu verkleinern.

Die Anzahl der benötigten Würfel skaliert mit $(1/\epsilon)^{D_0}$ bzw. $(1/\epsilon)^{D_1}$. Diese mit der Dimension exponentielle Zunahme beschränkt derartige Rechnungen (heutzutage) auf D_0 und D_1 kleiner als Drei [34, 36]. Allerdings wurden leichter errechenbare obere und untere Schranken für D_1 gefunden, die in fast allen untersuchten Beispielen mit niedrigdimensionalem Phasenraum übereinstimmende oder nahezu übereinstimmende Werte geliefert haben [36]. Dies scheint sich jedoch, wie wir im Rahmen dieser Arbeit noch sehen werden, nicht ohne weiteres auf hochdimensionale Systeme zu übertragen.

Die untere Schranke ist durch die Korrelationsdimension D_2 gegeben:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1/\epsilon)} \left[-\ln \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} (p(i))^2 \right]. \quad (2.8)$$

In der Tat läßt sich beweisen [55], daß

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0. \quad (2.9)$$

Die Gleichheit in Gl. (2.9) ist genau dann erfüllt, wenn alle Wahrscheinlichkeiten $p(i)$ identisch sind. Aufgrund des zeitlich begrenzten Gedächtnisses einer chaotischen Trajektorie, kann man die Verteilung $p(i)$ interpretieren, als wenn sie das Ergebnis eines stochastischen Prozesses wäre. Die Summe im Logarithmus in Gl. (2.8) ist dann gerade die Wahrscheinlichkeit, daß ein Paar zufällig auf einer Trajektorie ausgewählter Punkte in denselben Würfel der Überdeckung fällt. Bis auf einen ϵ -unabhängigen Geometriefaktor ist dies auch die Wahrscheinlichkeit, zwei Punkte im Abstand kleiner ϵ zu finden. Nimmt man also in Simulationen oder Experimenten M Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ eines Attraktors auf, indem man z.B. in festen Zeitabständen den Zustand einer Trajektorie mißt, dann ist D_2 gegeben durch

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(C(\epsilon))}{\ln(\epsilon)} , \quad (2.10)$$

wobei

$$C(\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \theta(\epsilon - |x_i - x_j|) . \quad (2.11)$$

θ ist die Heaviside-Funktion: $\theta(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $\theta(x) = 1$ für $x > 0$. Die Funktion $C(\epsilon)$ zählt die Anzahl der Punktpaare mit einem Abstand $|x_i - x_j|$ kleiner ϵ .

Eine obere Schranke von D_1 ist durch die von Kaplan und Yorke [58] eingeführte Lyapunov Dimension D_L gegeben. Die Lyapunov-Exponenten des Attraktors seien nach abnehmendem Wert geordnet. Dann ist

$$D_L = j + \frac{1}{\lambda_{j+1}} \sum_{i=1}^j \lambda_i , \quad (2.12)$$

wobei j der maximale Index ist, für den $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$. Ledrappier, Douady und Oesterle [59] konnten in voller Allgemeinheit (genauer: für zweimal stetig differenzierbare Abbildungen vom Typ (2.2) und auf dem Attraktor A ergodischem Maß mit kompaktem Träger) zeigen, daß

$$D_1 \leq D_L . \quad (2.13)$$

2.3.2. Metrische Entropie

Die metrische Entropie K_1 wird verwendet, um in quantitativer Weise zu beschreiben, wie chaotisch ein System ist. Um K_1 zu bestimmen nehmen wir wieder an, daß der Attraktor im m -dimensionalen Phasenraum von $N(\epsilon)$ Würfeln mit Kantenlänge ϵ überdeckt ist. Ferner sei der Zustand einer generischen Trajektorie auf dem Attraktor in Zeitabständen τ gemessen ($\tau = 1$ im Falle von Abbildungen (2.2)). Dann läßt sich aus den Messdaten die Wahrscheinlichkeit $p(i_1, \dots, i_k)$ bestimmen, daß die Trajektorie in k im Zeitabstand τ aufeinanderfolgenden Messungen in den Würfeln $i_1, \dots, i_k$ ist. Die metrische Entropie ist nun

$$K_1 = \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau k} \left(- \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{N(\epsilon)} p(i_1, \dots, i_k) \ln(p(i_1, \dots, i_k)) \right), \quad (2.14)$$

wobei der erste Limes bei Abbildungen vom Typ (2.2) entfällt. Für kleine ϵ gibt K_1 an, wieviel Information pro Zeiteinheit benötigt wird, um den Zustand des Systems über einen langen Zeitraum mit der Genauigkeit ϵ zu beschreiben. Die metrische Entropie K_1 läßt also zwischen regulärem (hier voraussagbarem) deterministischen und chaotischem deterministischen Verhalten, sowie zwischen deterministischem und stochastischem Verhalten, unterscheiden [36]:

$$\begin{aligned} K_1 &= 0 && \text{regulär} \\ \infty > K_1 &> 0 && \text{chaotisch} \\ K_1 &= \infty && \text{stochastisch} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bei der Bestimmung von K_1 treten dieselben Probleme wie der Bestimmung von D_1 auf. Gleich wie dort findet man auch hier leichter berechenbare obere und untere Schranken. Während die angegebene obere Schranke i.a. mit K_1 übereinstimmt, liegt die angegebene untere Schranke oft unter dem Wert vom K_1 [36]. Sie läßt aber dennoch in der Regel eine qualitative Abschätzung von K_1 zu und dient als ein experimentell leichter als die Lyapunov-Exponenten zugängliches Kriterium für irreguläres Verhalten: Ist ihr Wert größer als Null, so wird eindeutig Chaos oder stochastisches Verhalten beobachtet.

Analog zur Dimension haben Grassberger und Proccacia [36] verallgemeinerte Entropien K_q , $q \in \mathbb{R}$, eingeführt, wobei K_1 die metrische Entropie ist und K_2 eine untere Schranke für K_1 abgibt:

$$K_2 = \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} - \frac{1}{\tau k} \ln \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{N(\epsilon)} (p(i_1, \dots, i_k))^2 \right). \quad (2.16)$$

Wieder interpretiert man aufgrund des zeitlich begrenzten Gedächtnisses einer Trajektorie auf einem chaotischen Attraktor die Verteilungen $p(i_1, \dots, i_k)$ in (2.14) und (2.16) wie Ergebnisse eines stochastischen Prozesses. Faßt man die Resultate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ von im Zeitabstand τ an einer generischen Trajektorie durchgeführten Messungen in Vektoren $\mathbf{y}_{i,k} = (\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i+k-1})$ in $\mathbb{R}^{mk}$ zusammen, dann ist der Summenausdruck in Gl. (2.16) bis auf einen Geometriefaktor gerade die Wahrscheinlichkeit, daß bei zufällig ausgewähltem i

und j $|y_{i,k} - y_{j,k}|$ kleiner ϵ ist. In Simulationen oder Experimenten lassen sich aus $M+k-1$ in Zeitabständen τ aufeinanderfolgenden Messungen des Systemzustandes M Vektoren $y_{i,k}$ gewinnen und K_2 läßt sich bestimmen aus

$$K_2 = \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(- \frac{1}{\tau k} \ln(C_k(\epsilon)) \right), \quad (2.17)$$

wobei

$$C_k(\epsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M^2} \sum_{i,j=1}^M \theta(\epsilon - |y_{i,k} - y_{j,k}|). \quad (2.18)$$

Nach wenigen algebraischen Umformungen läßt sich Gl. (2.17) in die üblicherweise verwendete Form

$$K_2 = \left(\lim_{\tau \rightarrow 0} \right) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{C_k(\epsilon)}{C_{k+1}(\epsilon)} \right) \quad (2.19)$$

bringen. Eine genauere Beschreibung der Auswertung von Gl. (2.19) erfolgt in Kap. 6.3.

Eine obere Schranke für K_2 stellt die Summe H der positiven Lyapunov-Exponenten dar [60]:

$$K_1 \leq H = \sum \text{positive } \lambda_i. \quad (2.20)$$

Numerische und analytische Resultate deuten an, daß in der Regel sogar das Gleichheitszeichen in Gl. (2.20) verwendet werden kann [61].

2.4. Unendlichdimensionale Systeme

Bisher haben wir uns auf Systeme mit endlichdimensionalem Phasenraum beschränkt. Viele Fragen, die sich in endlichdimensionalen Systemen einfach beantworten lassen, sind schwierig im Kontext unendlichdimensionaler Systeme: Haben Attraktoren in unendlichdimensionalen Systemen im allgemeinen eine endliche Dimension? Existiert das Spektrum der Lyapunov-Exponenten und falls ja ist es diskret? Analytisch konnte die erste Frage zumindest für die Navier-Stokes-Gleichungen [62] und für gewisse

Differentialgleichungen mit zeitverzögerten Termen mit ja beantwortet werden [63]. Auch konnte für bestimmte Klassen von Systemen sowohl die Existenz als auch die Diskretheit des Spektrums der Lyapunov-Exponenten nachgewiesen werden [64]. Ein weiteres Argument, das endlichdimensionale Attraktoren erwarten läßt, greift auf das Theorem der zentralen Mannigfaltigkeit [43] zurück: Dieses Theorem besagt, daß eine endlichdimensionale anziehende zentrale Mannigfaltigkeit auftritt, wenn ein stabiler Fixpunkt unter Veränderung eines Parameters instabil wird und dabei zwei Eigenwerte der linearisierten Dynamik den Betrag eins haben.

Ein pragmatischer Standpunkt, um ein gegebenes System mit unendlichdimensionalem Phasenraum S zu untersuchen, ist, seine Trajektorien mittels einer Abbildungsfamilie $g_1, g_2, \dots$, wobei $g_m: S \rightarrow R^{m'}$, in Räume wachsender Dimension m' einzubetten. Für jeden Wert von m' analysiert man dann das eingebettete System numerisch wie ein endlichdimensionales System mit Phasenraum $R^{m'}$, d.h. berechnet Dimensionen, das Spektrum der Lyapunov-Exponenten, usw.. Werden die Ergebnisse für hinreichend große m' unabhängig von m' und der gewählten Abbildungsfamilie, dann wird man sie Eigenschaften des unendlichdimensionalen Systems selbst zuschreiben. Erhält man in dieser Prozedur einen endlichen Wert für die Dimension, dann sind endlichdimensionale Attraktoren indiziert. Real läßt sich dieses Programm nur eingeschränkt durchführen, insbesondere beschränkt man sich i.a. auf eine oder zwei Abbildungsfamilien.

3. MODELL EINES PHASENKONJUGIERENDEN RESONATORS

In diesem Kapitel wird das später studierte Modell eines phasenkonjugierenden Resonators (PKR) entwickelt. Kapitel 3.1 konzentriert sich auf die Beschreibung des phasenkonjugierenden Spiegels (PKS), in Kapitel 3.2 wird dann die mit einem normalen Spiegel komplettierte Konfiguration beschrieben, und Kapitel 3.3 betrachtet schließlich die experimentelle Realisierbarkeit des PKR.

3.1. Phasenkonjugierender Spiegel

Wir betrachten einen PKR, in dem der PKS ein diffusives, isotropes Kerr-Medium mit linearer Absorption und endlicher Reaktionszeit τ ist. Der PKS habe die Länge L_m . Er wird von zwei konstanten gegenläufigen Feldern F_0 und B_0 , welche beide die Frequenz ω_0 haben und in dieselbe Richtung linear polarisiert sind, im Winkel θ zur z -Achse, die als optische Achse des PKR definiert ist, gepumpt. Ein normaler Spiegel mit Krümmungsradius R und einer Apertur der Breite u ist im Abstand L vom PKS positioniert, um das Feld E_b , das im Winkel θ gestreut wurde, auf den PKS zurückzureflektieren (siehe Fig. 3.1).

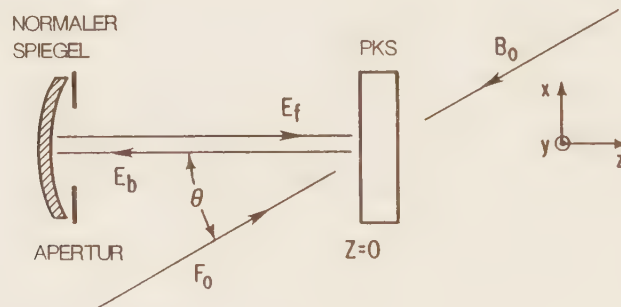


Fig. 3.1: PKR mit PKS aus Kerr-Medium, der von zwei gegenläufigen Feldern F_0 und B_0 mit der gleichen Frequenz ω_0 gepumpt wird. Der normale Spiegel reflektiert im Winkel θ gestreute Felder auf den PKS zurück.

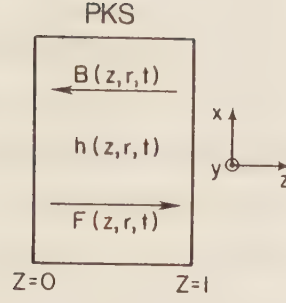


Fig. 3.2: PKS, der durch Funktion h beschrieben wird, mit sich vorwärts (F) und rückwärts (B) ausbreitenden Feldern. Die z -Koordinate ist auf die Länge des Mediums L_m normiert. Alle Felder sind in y -Richtung polarisiert. Die Oberflächen des Mediums sind antireflektionsbeschichtet.

Um die Dynamik der Felder im PKS zu beschreiben, gehen wir von der Wellengleichung für das elektrische Feld in einem dielektrischen Medium,

$$\left[\nabla^2 - \text{grad div} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathcal{E}(z, r, t) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}(z, r, t) , \quad (3.1a)$$

und der Maxwell-Gleichung

$$\text{div} (\epsilon_0 \mathcal{E}(z, r, t) + \mathcal{P}(z, r, t)) = 0 , \quad (3.1b)$$

mit $r=(x,y)$, aus. Hierbei ist $\mathcal{E}(z, r, t)$ der Vektor des elektrischen Feldes und $\mathcal{P}(z, r, t)$ der Vektor der Polarisation. $\mathcal{P}$ läßt sich als Summe aus einem linearen und nichtlinearen Funktional von $\mathcal{E}$ schreiben:

$$\mathcal{P}[\mathcal{E}](z, r, t) = \mathcal{P}_l[\mathcal{E}](z, r, t) + \mathcal{P}_{nl}[\mathcal{E}](z, r, t) .$$

Wir nehmen an, daß das Feld im PKS aus zwei sich im wesentlichen in $\pm z$ -Richtung ausbreitenden, gegen die optische Frequenz ω_0 zeitlich langsam variierenden Strahlen zusammensetzt. Diese Situation wird von der paraxialen Näherung erfaßt, im Rahmen der sich Gl. (3.1a) auf zwei skalare Differentialgleichungen erster Ordnung reduziert, während Gl. (3.1b) als im Rahmen der Näherung implizit erfüllt betrachtet wird, also nicht mehr erscheint. Sie ist in Ref. [65] diskutiert, in der am Beispiel eines

Lasermediums gezeigt wird, daß Lösungen der abgeleiteten Gleichungen, die quer zur z-Achse langsam gegen eine optische Wellenlänge variieren, auch (näherungsweise) Lösungen der vollen Gln. (3.1) sind. Die paraxiale Näherung nimmt an:

(1) Der $\text{grad}(\text{div}\mathcal{E})$ -Term kann in Gl. (3.1a) vernachlässigt werden.

(2) Das Feld $\mathcal{E}$ und die Polarisation $\mathcal{P}$ sind senkrecht zur optischen Achse des PKR in Richtung der Polarisation der Pumpstrahlen linear polarisiert.

(3) Zerlegt man das Feld und die Polarisation im PKS (Komponente in Polarisationsrichtung) in

$$E'(z,r,t) = E(z,r,t) e^{-i\omega_0 t} + \text{k.k.} , \quad (3.2a)$$

$$P_1'(z,r,t) = P_1(z,r,t) e^{-i\omega_0 t} + \text{k.k.} , \quad (3.2b)$$

$$P_{nl}'(z,r,t) = P_{nl}(z,r,t) e^{-i\omega_0 t} + \text{k.k.} , \quad (3.2c)$$

wobei

$$E(z,r,t) = F(z,r,t) e^{ik_m z} + B(z,r,t) e^{-ik_m z} , \quad (3.3a)$$

$$P_1(z,r,t) = P_{1,F}(z,r,t) e^{ik_m z} + P_{1,B}(z,r,t) e^{-ik_m z} , \quad (3.3b)$$

$$P_{nl}(z,r,t) = P_{nl,F}(z,r,t) e^{ik_m z} + P_{nl,B}(z,r,t) e^{-ik_m z} , \quad (3.3c)$$

dann ist der größte Teil der räumlichen und zeitlichen Variation des Feldes und der Polarisation in den Exponentialfaktoren enthalten. Die Einhüllenden F , $P_{1,F}$, $P_{nl,F}$ und B , $P_{1,B}$, $P_{nl,B}$ der sich vorwärts bzw. rückwärts ausbreitenden Strahlen genügen den am Beispiel F erläuterten Bedingungen $k_m^2 |F(z,r,t)| \gg k_m |\partial F(z,r,t)/\partial z| \gg |\partial^2 F(z,r,t)/\partial z^2|$ und $\omega_0^2 |F(z,r,t)| \gg \omega_0 |\partial F(z,r,t)/\partial t| \gg |\partial^2 F(z,r,t)/\partial t^2|$. Alle im Rahmen einer systematischen Entwicklung nach Harmonischen von ω_0 und k_m auftretenden höheren Terme sind vernachlässigt. k_m ist hier der Betrag des Wellenvektors der Pumpstrahlen im Medium.

(4) Der lineare Anteil der Polarisation P_1' folgt adiabatisch dem Feld: Für ein gegenüber kontinuierlichen Translationen in Raum und Zeit invariantes Medium ist der allgemeine funktionale Zusammenhang zwischen P_1' und E' gegeben durch

$$P_1'[E'](z,r,t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' dr' dt' \chi_1'(z',r',t') E'(z-z',r-r',t-t')$$

$$= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' dr' dt' \chi_1'(z',r',t') \{ F(z-z',r-r',t-t') \exp[i(k_m(z-z') - \omega_0(t-t'))] + \dots \}.$$

Hierbei ist χ_1' die lineare Ansprechfunktion des Mediums. Es wird nun angenommen, daß sich die Amplitudenfaktoren F und B in E' (siehe Gln. (3.2a) und (3.3a)) räumlich und zeitlich langsam gegen die Ansprechzeit bzw. -länge in χ_1' ändern und vor das Integral gezogen werden können. Mit

$$\chi_1(k_m, 0, 0, \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' dr' dt' \chi_1'(z',r',t') \exp[-i(k_m z' - \omega_0 t')]$$

und $\chi_1(k_m, 0, 0, \omega_0) = \chi_1(-k_m, 0, 0, \omega_0)$ erhält man also

$$P_1'[E'](z,r,t) = \chi_1(k_m, 0, 0, \omega_0) E(z,r,t) e^{-i\omega_0 t} + \text{k.k.} .$$

Zerlegt man χ_1 in Real- und Imaginärteil und unterdrückt die ω_0 - und k_m -Indizes,

$$\chi_1 = n_0^2 - 1 + i \frac{n_0^2}{k_m} \alpha_0 , \quad (3.4)$$

dann ist n_0 der lineare Brechungsindex des Mediums, $k_m = n_0 k_0$ der Betrag des Wellenvektors der Pumpstrahlen im Medium, k_0 sein Wert im Vakuum und α_0 der lineare Absorptionskoeffizient. Man beachte, daß Annahme (3) mit Gl. (3.1) nur konsistent ist, falls $k_m \gg \alpha_0$, d.h. die lineare Absorption auf der Skala einer Wellenlänge klein ist.

Bezüglich der nichtlinearen Polarisation nehmen wir an, daß das elektrische Feld im Medium ein zeitlich langsam gegen die Pumpfrequenz variierendes reelles skalares Feld h (z.B. Temperaturfeld oder ein 'mean field') erzeugt, das für eine dispersive optische Nichtlinearität verantwortlich ist. Präzise ausgedrückt genüge h der Bedingung $\omega_0^2 |h(z,r,t)| \gg \omega_0 |\partial h(z,r,t)/\partial t| \gg |\partial^2 h(z,r,t)/\partial t^2|$ und sei ein Funktional der zeitlich langsam variierenden Einhüllenden E des Feldes (siehe Gl. (3.2a)). Beiträge zu h bei der Pumpfrequenz ω_0 und deren harmonischen seien also vernachlässigbar. Die optische

Nichtlinearität wird als lokal und linear in h angenommen. Wir nehmen wieder den adiabatischen Grenzfall an:

$$P_{nl}[E'](z,r,t) = \epsilon_0 \frac{2n_0^2}{k_m} h[E](z,r,t)E'(z,r,t) \quad (3.5)$$

Wiederum sind Annahme (3) und Gl. (3.1) nur konsistent erfüllbar, falls $k_m \gg h$, d.h. die nichtlineare Brechung schwach auf der Skala einer optischen Wellenlänge ist. Weiter beschränken wir uns auf Funktionale h der Form

$$h[E](z,r,t) = h^0[E](z,r,t) + h^+[E](z,r,t) e^{2ik_m z} + h^-[E](z,r,t) e^{-2ik_m z}, \quad (3.6)$$

wobei h^0 , h^+ und h^- analog zu den Feldern F und B langsam gegen eine optische Wellenlänge variieren. In Gl. (3.5) werden dann nur die Beiträge $\propto \exp(\pm i(k_m z \pm \omega_0 t))$ zur nichtlinearen Polarisation berücksichtigt.

Die explizite Form von h in Gl. (3.6) schränkt den mit den bisherigen Annahmen verträglichen nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Feld im PKS und h ein: Falls h^+ und h^- signifikant zur nichtlinearen Brechung beitragen, dann muß die Nichtlinearität proportional zur Intensität des elektrischen Feldes im PKS sein (Kerr-artiges Medium). Physikalisch beschreiben in diesem Fall h^+ und h^- das Gitter des Brechungsindex, das vom Intensitätsgitter der gegenläufigen Wellen F und B im PKS herrührt.

Nach diesen Annahmen läßt sich Gl. (3.1a) in $\exp(ik_m z)$ - und $\exp(-ik_m z)$ -Beiträge trennen, die in erster Näherung der Gleichung

$$\left[\beta \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{4\pi\mathcal{F}} \nabla_T^2 + \frac{\alpha}{2} \right] F(z,r,t) = i[h^0(z,r,t)F(z,r,t) + h^+(z,r,t)B(z,r,t)], \quad (3.7)$$

bzw.

$$\left[\beta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{4\pi\mathcal{F}} \nabla_T^2 + \frac{\alpha}{2} \right] B(z,r,t) = i[h^-(z,r,t)F(z,r,t) + h^0(z,r,t)B(z,r,t)], \quad (3.8)$$

genügen. Hierbei haben wir die skalierten Längen $z = z/L_m$, $x = x/w_0$, und $y = y/w_0$, wobei w_0 die Breite der Pumpfelder ist, und die skalierte Zeit $t = t/\tau$ benutzt. (x , y , z , und t sind die realen physikalischen Dimensionen und die Zeit). Ferner ist β die Mediumtransitzeit in Einheiten von τ ,

$$\beta = \frac{L_m}{n_0 c \tau} , \quad (3.9)$$

und die Fresnel-Zahl $\mathcal{F}$ ist definiert als

$$\mathcal{F} = \frac{k_m w_0^2}{2\pi} . \quad (3.10)$$

$k_m = k_0 n_0 / L_m$ ist jetzt der skalierte Wellenvektor im Medium, $\alpha = \alpha_0 L_m$ ist der skalierte lineare Absorptionskoeffizient und der transversale Laplace-Operator

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

berücksichtigt die Beugung.

Wie in der Einleitung begründet, wollen wir einen Halbleiter-PKS im PKR verwenden. Fragen der physikalischen Realisierbarkeit der folgenden Modellannahmen werden in Abschnitt 3.3 diskutiert. Wir betrachten den Fall, in dem h proportional zur Dichte der elementaren Anregungen, die die Nichtlinearität im Halbleiter verursachen, d.h. Elektron-Loch-Paaren in InSb oder Exzitonen in GaAs [8], ist. In beiden Fällen ist die Diffusionslänge $L_D = (D\tau)^{1/2}$, wobei D der ambipolare Diffusionskoeffizient und τ die Rekombinationsrate der elementaren Anregungen ist, die hier als unabhängig von der Dichte der Anregungen angenommen ist. Wir nehmen an, daß h der Diffusionsgleichung

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \ell_T^2 \nabla_T^2 + \ell_L^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 1 \right] h(z,r,t) = -\frac{2}{\pi \mathcal{F}} \operatorname{sgn}(n_2) |E(z,r,t)|^2 \quad (3.12)$$

genügt, wobei n_2 der nichtlineare Brechungsindex zweiter Ordnung des Mediums ist,

$$\ell_T = L_D / w_0 \quad (3.13)$$

und

$$\ell_L = L_D / L_m . \quad (3.14)$$

Der $|E|^2$ Faktor auf der rechten Seite von Gl. (3.12) ist das Kennzeichen einer Kerr-artigen Nichtlinearität, wie sie in dieser Arbeit angenommen wird. Die Normalisierung

von $|F|^2$ und $|B|^2$ kann man erhalten, wenn man die zeitunabhängige Ausbreitung eines breiten ($\ell_T \simeq 0$) Strahls (o.B.d.A. von Feld F) in einem dicken ($\ell_L \simeq 0$), selbstfokussierenden ($n_2 > 0$) Medium mit vernachlässigbarer Absorption ($\alpha \simeq 0$) betrachtet. Gl. (3.12) hat dann die Lösung

$$h(z,r,t) = \frac{2}{\pi \mathcal{F}} |F(z,r)|^2.$$

Setzt man sie in Gl. (3.7) ein, dann erkennt man, daß die Intensität $|F|^2$ in Einheiten von $P_c/(\pi w_0^2/2)$ gemessen wird, wobei P_c die kritische Leistung ist, bei der Selbstfokussierung auftritt.

Gl. (3.12) läßt sich sofort in Gleichungen für die einzelnen Komponenten h^0 , h^+ und h^- von h aufspalten (siehe Gl. (3.6)):

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \ell_T^2 \nabla_T^2 + \ell_L^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 1 \right] h^0(z,r,t) = -\frac{2}{\pi \mathcal{F}} \text{sgn}(n_2) [|F(z,r,t)|^2 + |B(z,r,t)|^2], \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial h^+(z,r,t)}{\partial t} = - (1 + 4k_m^2 \ell_L^2) h^+(z,r,t) + \frac{2}{\pi \mathcal{F}} \text{sgn}(n_2) F(z,r,t) B(z,r,t)^*, \quad (3.16a)$$

$$h^-(z,r,t) = h^+(z,r,t)^*. \quad (3.16b)$$

Die Beschreibung des Mediums wird vervollständigt durch die Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial z} h(z,r,t) = 0, \quad (3.17)$$

die an beiden Oberflächen $z = 0$ and $z = 1$ des PKS gelten soll. Sie ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung aller Rekombinationseffekte an den Oberflächen des PKS und läßt sich umschreiben in

$$\frac{\partial}{\partial z} h^0(0,r,t) + 2ik_m h^+(0,r,t) - 2ik_m h^-(0,r,t) = 0, \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} h^0(1,r,t) + 2ik_m h^+(1,r,t) e^{ik_m} - 2ik_m h^-(1,r,t) e^{-ik_m} = 0, \quad (3.18b)$$

wobei die Terme $\partial h^\pm / \partial z$ gegen die Terme $k_m h^\pm$ vernachlässigt wurden. Man stellt sofort fest, daß die Randbedingungen (3.18) mit der Annahme, daß h_0 langsam gegen $1/k_m$ variiert, nur konsistent sind, wenn h^+ , $h^- \ll h^0$. Anhand von Gl. (3.16a) sieht man, daß dies im Grenzfall hoher Diffusion, $4k_m^2 \ell_L^2 \gg 1$, erfüllt ist. Dann ist das longitudinale Gitter des Brechungsindex ausgewaschen. Von jetzt ab konzentrieren wir uns auf den noch extremeren Grenzfall

$$4k_m^2 \ell_L^2 \gg 1, \quad (3.19)$$

und vernachlässigen alle Effekte von h^+ und h^- sowohl im Medium (in den Gln. (3.7) und (3.8)) als auch an dessen Oberfläche (in Gln. (3.18)), d.h.

$$h^+(z, r, t) = h^-(z, r, t) \equiv 0. \quad (3.20)$$

Als nächstes nehmen wir an, daß Beugungseffekte im PKS vernachlässigbar sind ($\mathcal{F} \gg 1$) und lassen daher den transversalen Laplace-Operator in den Feldgleichungen (3.7) und (3.8) wegfallen. Diese lassen sich jetzt leicht integrieren. Falls h sich zeitlich langsam gegen die Mediumtransitzeit β ändert (i.a. gegeben, wenn die Reaktionszeit des Mediums viel länger als β ist), erhält man

$$F(z, r, t) = F(0, r, t) e^{-\alpha z/2} \exp \left[i \int_0^z dz' h^0(z', r, t) \right], \quad (3.21)$$

$$B(z, r, t) = B(1, r, t) e^{-\alpha(1-z)/2} \exp \left[-i \int_1^z dz' h^0(z', r, t) \right]. \quad (3.22)$$

Setzt man die Gln. (3.21) und (3.22) in Gl. (3.15) ein und integriert über z , dann erhält man unter Verwendung der Gln. (3.18) und (3.20)

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \ell_T^2 \nabla_T^2 - 1 \right] \Phi(r, t) = -\operatorname{sgn}(n_2) \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} [|F(0, r, t)|^2 + |B(1, r, t)|^2], \quad (3.23)$$

wobei

$$\Phi(r,t) = \int_0^1 dz h^0(z,r,t) \quad (3.24)$$

die totale nichtlineare Phasenverschiebung ist, die die Felder erfahren, wenn sie den PKS durchlaufen. Man beachte, daß die Felder F und B in Gl. (3.23) mit einem Faktor $(2/\pi\mathcal{F})^{1/2}$ renormalisiert wurden. Kennt man nun die auf den PKS einfallenden Felder an dessen Oberfläche ($F(0,r,t)$ und $B(1,r,t)$), dann lassen die Gln. (3.21) bis (3.23) die vom PKS ausgehenden Felder $F(1,r,t)$ und $B(0,r,t)$ berechnen. Diese Gleichungen beschreiben also den phasenkonjugierenden Spiegel vollständig. Es ist noch festzuhalten, daß bei der Beschreibung der Felder im PKS keine Phasenanpassungsbedingung verwendet wurde.

3.2. Phasenkonjugierender Resonator

Um die Beschreibung des PKR zu vervollständigen, müssen wir noch die Ausbreitung des Feldes im leeren Teil des Resonator und die Reflektion am konventionellen Endspiegel in Rechnung ziehen (siehe Fig. 3.1). Zunächst nehmen wir an, daß der Winkel θ zwischen der Resonatorachse und den Pumpstrahlen klein ist, um der paraxialen Näherung im vorigen Abschnitt zu genügen. Ferner sollen keine Reflektionen an den Oberflächen des PKS auftreten (Antirefleksionsbeschichtung). Um ein numerisch einfacher zu behandelndes Modell zu erhalten, beschränken wir uns auf eine zweidimensionale Geometrie, d.h. wir nehmen an, daß alle Wellen in y -Richtung eben sind.

Das auf den PKS in Vorwärtsrichtung einfallende Feld ist auf dessen ($z = 0$)-Oberfläche gegeben durch

$$F(0,x,t) = F_0(x) \exp(ik\theta x) + E_f(0,x,t) , \quad (3.25)$$

wobei wir $\sin\theta \simeq \theta$ und $k = k_0 w_0$ benutzt haben. Um das vom PKS in den Resonator eingekoppelte Feld $E_b(0,x,t)$ auf der ($z = 0$)-Oberfläche zu erhalten, stellen wir zunächst fest, daß

$$B(1,x,t) = B_0(x) \exp(-ik\theta x) , \quad (3.26)$$

und zerlegen die Phasenverschiebung $\Phi(r,t)$ in

$$\Phi(x,t) = \Phi_0(x,t) + \Phi_+(x,t) e^{ik\theta x} + \Phi_-(x,t) e^{-ik\theta x} . \quad (3.27)$$

Schreibt man $\Phi_+(x,t)$ in der Form $|\Phi_+(x,t)| \exp(i\phi_+(x,t))$ und setzt (3.26) und (3.27) in Gl. (3.22) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} B(0,x,t) &= e^{-\alpha/2} B_0(x) e^{i\Phi_0(x,t)} e^{2i|\Phi_+(x,t)| \cos(k\theta x + \phi_+(x,t))} e^{-ik\theta x} \\ &= e^{-\alpha/2} B_0(x) e^{i\Phi_0(x,t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2|\Phi_+(x,t)|) e^{in(k\theta x + \phi_+(x,t))} e^{-ik\theta x} , \end{aligned} \quad (3.28)$$

wobei $J_n(x)$ die Bessel-Funktion n -ter Ordnung ist.

Den Effekt der nichtlinearen Brechung im Medium auf den Pumpstrahl B_0 kann man als Streuung von B_0 an dem transversalen Brechungsindexgitter interpretieren, das vom Pumpstrahl F_0 und vom am normalen Endspiegel reflektierten Feld E_f im PKS aufgebaut wird [66]. Die Terme in der Summe von Gl. (3.28) korrespondieren nun zu den verschiedenen Streuordnungen. Das Auftreten aller Ordnungen zeigt, daß der PKS im Raman-Nath-Bereich ($\theta \ll 1$) arbeitet, in dem keine Phasenanpassungsbedingung anwendbar ist [31].

Wir führen jetzt eine spezifische Geometrie ein, die die höheren Streuordnungen davon abhält, auf den PKS zurückreflektiert zu werden. Um zu sehen, wie dies bewerkstelligt werden kann, separieren wir Gl. (3.23) in $\exp(i0x)$ - und $\exp(\pm ikx)$ -Terme und erhalten

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \ell_T^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right] \Phi_0(x,t) = \gamma [|F_0(x)|^2 + |B_0(x)|^2 + |E_f(0,x,t)|^2] , \quad (3.29)$$

und

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \ell_T^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2ik\theta \ell_T^2 \frac{\partial}{\partial x} + 1 + (k\theta \ell_T)^2 \right] \Phi_{\pm}(x,t) = \gamma F_0(x) E_f^*(0,x,t) . \quad (3.30)$$

Hierbei haben wir die Abkürzung

$$\gamma = \text{sgn}(n_2) \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} \quad (3.31)$$

benützt.

Falls die Felder F_0 , B_0 und E_f transversal langsam gegen die Länge $1/k\theta$ variieren, dann trifft dies auch für Φ_0 und Φ_+ zu. Die niedrigsten Streuordnungen in Gl. (3.28) sind in diesem Fall leicht separierbar: Eine Apertur mit Radius u , die vor dem normalen Spiegel aufgestellt ist und $(u/L)/\theta \ll 1$ genügt, erlaubt nur der ersten Streuordnung, auf den PKS zurückreflektiert zu werden. Unter diesen Bedingungen ist das Feld, das am PKS effektiv in den PKR eingekoppelt wird,

$$E_b(0,x,t) = ie^{-\alpha/2} B_0(x) e^{i\Phi_0(x,t)} J_1(2|\Phi_+(x,t)|) e^{i\phi_+(x,t)} . \quad (3.32)$$

Die *phasenkonjugierende* Eigenschaft des jetzt vollständig beschriebenen Spiegels läßt sich am besten im Falle stationärer Felder und vernachlässigbarer transversaler diffusiver Kopplung einsehen: Dann ist das vom PKS in den Resonator reflektierte Feld E_b eine Funktion der Intensität $|E_f|^2$ und der komplexkonjugierten Amplitude E_f^* des vom Resonator einfallenden Feldes E_f . Eine zu E_f exakt phasenkonjugierte erste Streuordnung E_b (nur sie 'sieht' der PKR), d.h. $E_b \propto E_f^*$ am PKS, erhält man, falls alle auf das Medium einfallenden Felder (die Pumpstrahlen F_0 und B_0 sowie E_f) stationäre ebene Wellen sind und E_f zudem klein ist (Limit $J_1(2|\Phi_+|) \simeq |\Phi_+|$).

Die Ausbreitung des Feldes im Resonator ist durch die paraxiale Wellengleichung beschrieben (Form wie Gl. (3.8), aber ohne Mediumterme d.h. $h = 0$ und $\alpha = 0$). Propagation des Feldes E_b vom PKS zum konventionellen Spiegel, Multiplikation mit der Apertur- und Spiegelprofilfunktion, und dann Propagation zurück zum PKS liefert für das Feld E_f , das auf den PKS zur Zeit $t + t_c$ einfällt, wobei t_c die Zeit für einen Umlauf im Resonator ist:

$$\begin{aligned} E_f(0,x,t+t_c) = & \text{rexp}(i(\phi_r + 2k_0L)) \text{FT}^{-1} [\exp(-ip^2/4\pi\mathcal{F}_r) \\ & \text{FT} [\exp(-x^2/u^2) \exp(-i2\pi\mathcal{F}_r Lx^2/R) \\ & \text{FT}^{-1} [\exp(-ip^2/4\pi\mathcal{F}_r) \text{FT} (E_b(0,x,t))]]] . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Hierbei ist $r \exp(i\phi_r)$ die komplexe Reflektivität und R der Krümmungsradius des normalen Spiegels, u ist die Breite der Apertur (der Einfachheit halber als von Gauss'scher Form angenommen) in Einheiten von w_0 , und

$$\mathcal{F}_r = \frac{k_0 w_0^2}{2\pi L} \quad (3.34)$$

ist die Fresnel-Zahl des Resonators der Länge L . FT (FT^{-1}) steht für die (inverse) Fourier-Transformation:

$$FT(g(x,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ipx} g(x,t) = g(p,t) . \quad (3.35)$$

Gl. (3.33) reduziert die Ausbreitung des Feldes im leeren Teil des Resonators auf eine Berechnung der Felder in der ($z = 0$)-Ebene. Die einzige explizite räumliche Koordinate, die zur Beschreibung der Dynamik des phasenkonjugierenden Resonators benötigt wird, ist also die x -Koordinate. Der PKR ist jetzt vollständig beschrieben durch die Gln. (3.29) bis (3.33).

3.3. Experimentelle Realisierung

Nun bleibt noch die Frage nach der experimentellen Realisierbarkeit des entwickelten PKR-Modells. Die schnelle und große optische Nichtlinearität, an der wir interessiert sind, ist elektronischer Natur und findet sich experimentell am ausgeprägtesten in den Halbleitermaterialien GaAs und InSb, wobei die Pumpfrequenz ω_0 (fast) resonant mit der Bandlücke sein muß [8]. Wir konzentrieren uns daher im folgenden auf diese beiden Materialien, die zu den Halbleitern mit kleiner Bandlücke gehören. Deren optische Nichtlinearität kann mit einer einheitlichen mikroskopischen Theorie erklärt werden [67]. Die im Rahmen dieser Theorie berechnete nichtlineare Suszeptibilität hängt i.a. in komplizierter Weise von den Feldamplituden im Medium ab. Der von uns angenommene Fall, in dem h proportional zu den elementaren Anregungen ist, die die Nichtlinearität verursachen, und die Nichtlinearität zudem dispersiv und Kerr-artig ist, läßt sich i.a. nur realisieren, wenn die Pumpfrequenz ω_0 hinreichend gegen die Bandlücke verstimmt ist. Dies impliziert aber auch eine reduzierte optische Nichtlinearität. Wir halten daher fest, daß wir für die numerisch einfache Handhabbarkeit unseres Modells den Preis eingeschränkter Gültigkeit bezahlen müssen. Die weiteren Annahmen lassen sich dagegen i.a. erfüllen: Keine Oberflächeneffekte, durch starke Diffusion ausgewaschenes longitudinales Brechungsindexgitter, und vernachlässigbare Beugung im PKS. Darüberhinaus wäre, wie in der Einleitung angesprochen, ein großer realisierbarer Bereich des Verhältnisses von Resonatorumlaufzeit t_c zu Mediumreaktionszeit τ wünschenswert. Dies soll am Beispiel von GaAs und InSb demonstriert werden (die Daten für InSb stehen jeweils in Klammern).

Das Verhalten an der Oberfläche hängt i.a. stark von der Materialbearbeitung ab und läßt daher auf die Erfüllbarkeit von Bed. (3.17) hoffen. Mit einer Diffusionslänge $L_D \simeq 20\mu\text{m}$ ($60\mu\text{m}$) [8; 68], einem linearen Brechungsindex $n_0 \simeq 3.5$ (4.1) und einer Bandlücke $\omega_B \simeq .82\mu\text{m}$ ($5.4\mu\text{m}$) [8] erhält man $4k_m \ell_L^2 \simeq 43\text{mm}/L_m$ ($66\text{mm}/L_m$). Bei Probendicken im Submillimeterbereich, wie sie in optischen Bistabilitätsexperimenten verwendet werden, ist die Bedingung starker Diffusion ($4k_m \ell_L^2 \gg 1$) leicht erfüllt. Schließlich kann die Annahme vernachlässigbarer Beugung im PKS durch einen hinreichend dünnen PKS bzw. breite Pumpstrahlen erreicht werden. Während der Mediumreaktionszeit $\tau \simeq$ wenige ns (400ns) [8] breitet sich Licht in der Größenordnung 1m (120m) aus. Im Falle von GaAs dürfte somit t_c/τ in einem weiten Bereich einstellbar sein, ($t_c/\tau \ll 1$ bis $t_c/\tau > 1$), wogegen ein InSb-PKR auf $t_c/\tau \ll 1$ beschränkt sein dürfte.

Jetzt bleibt noch die Gretchenfrage, ob die phasenkonjugierende Reflektivität (in einem Ebene-Wellen-Modell für stationäre Felder definiert als $|E_b/E_f|$) bei rein dispersiver, Kerr-artiger Nichtlinearität, wie sie in dieser Arbeit angenommen wird, den Wert eins erreichen kann, den wir in Kap. 4.1.1 als Schwelle für Selbstoszillation des PKR finden werden. Hier ist anzumerken, daß optische Bistabilitätsexperimente i.a. mit Pumpfrequenzen nahe der Bandlücke durchgeführt werden, um die volle Nichtlinearität der Halbleiter auszuschöpfen. Dort sind aber nichtlineare Absorption und Dispersion von Bedeutung. Allerdings arbeitet man in der Regel in einem Bereich, in dem die Effekte der nichtlinearen Dispersion überwiegen. Der in derartigen Experimenten größte uns bekannte Messwert für die phasenkonjugierende Reflektivität ist $\simeq .4$ und stammt aus einer Messung an InSb, in der die dispersive Nichtlinearität Kerr-artig war [69]. Diese Messung wurde in einer Konfiguration angestellt, die der des PKR genau entspricht, mit einem Winkel θ von 2° . Wie in Ref. [69] angedeutet, sollte sich die Reflektivität bei kleinerem Winkel θ infolge reduzierten transversalen, diffusiven Effekten steigern: Im nächsten Kapitel (Gl. (4.4)) werden wir sehen, daß transversale Diffusion die Reflektivität des PKS um den Faktor $1 + \mu^2$ reduziert, wobei

$$\mu = k\theta\ell_T . \quad (3.36)$$

Aus den oben angegebenen Diffusions- und Wellenlängen erhält man $\mu \simeq 150\theta$ (70θ). Im Experiment in Ref. [69] war daher $\mu^2 \simeq 5$. Wählt man θ kleiner als 1° , dann sollte die Reflektivität den Wert eins übersteigen und Selbstoszillation im PKR einsetzen. Leider sind uns ähnliche Messungen an GaAs nicht bekannt. Aufgrund einer mit InSb vergleichbar starken Nichtlinearität [8] dürfte aber auch die Möglichkeit gegeben sein, die Schwelle für Selbstoszillation zu erreichen.

Am Schluß sei noch angemerkt, daß Halbleiter generell große Diffusionslängen der elementaren Anregungen, die für die Nichtlinearität verantwortlich sind, aufweisen. Kurzwellige Brechungsindexgitter dürften daher i.a. ausgewaschen werden. Hohe phasenkonjugierte Reflektion des PKS ist dann nur bei kleinen Winkeln $\theta \ll 1$ zwischen Resonatorachse und Pumpstrahlen zu erreichen, d.h. gerade in dem in unserem Modell betrachteten Raman-Nath-Bereich, in dem keine Phasenanpassungsbedingung anwendbar ist.

4. ANALYTISCHE RESULTATE

Die den PKR beschreibenden Gln. (3.29) - (3.33) sind hinreichend kompliziert, daß ihre Lösungen i.a. nur mit numerischen Simulationen gewonnen werden können. Eine Ausnahme ist ein PKR mit ebenem normalem Endspiegel ($R = \infty$) im Grenzfall vernachlässigbarer transversaler Kopplung. In Kapitel 4.1 studieren wir, wie in diesem Fall die stationären Lösungen aussehen und untersuchen ihre Stabilität gegen axiale Störungen. In Kapitel 4.2 werden dann transversale Störungen in die Stabilitätsanalyse mit einbezogen.

4.1. Axiale Moden

In diesem Kapitel vernachlässigen wir die Effekte der transversalen diffusiven Kopplung im PKS und der Beugung im PKR d.h. wir beschränken unsere Analyse auf PKR-Moden mit räumlichen Frequenzen $p \ll \ell_T^{-1}, \pi \mathcal{F}_r^{1/2}$. Dann kann der transversale Laplace-Operator in den Gln. (3.29) und (3.30) vernachlässigt und der Faktor $\exp(-ip^2/4\pi\mathcal{F}_r)$ im Propagator in Gl. (3.33) durch 1 ersetzt werden. Das Ergebnis ist ein völlig lokales Modell, in dem die Propagation im leeren Teil des Resonators einfach durch den multiplikativen Faktor

$$r_x(x) = r \exp(i(\phi_r + 2k_0L)) \exp(-x^2/u^2) . \quad (4.1)$$

beschrieben ist. Die optische Weglänge $2k_0L$ ist genau die axialer Strahlen; wir bezeichnen die betrachteten Moden daher als axial. Es sei noch angemerkt, daß die obige Bedingung an die räumlichen Frequenzen im Ortsraum $w \gg \ell_T, \pi^{-1}\mathcal{F}_r^{-1/2}$ impliziert, wobei $w (\leq 1)$ die skalierte Breite der studierten Moden ist. Dies ist genau die Situation, die man beim Verschwinden der transversalen Effekte anzutreffen erwartet.

4.1.1. Stationäre Lösungen

Man erhält das Verhalten der stationären axialen Moden, indem man die stationären Werte Φ_0^s und Φ_+^s der nichtlinearen Phasenverschiebung aus den Gln. (3.29) und (3.30) in die Gln. (3.32) und (3.33) einsetzt. Der resultierende Ausdruck liefert Selbstkonsistenzgleichungen für die Phase ϕ_f^s und die Amplitude $|E_f^s|$ des stationären Feldes E_f^s im Resonator. Mit den (konstanten) Pumpfeldern $F_0 = |F_0| \exp(i\phi_{F_0})$ und $B_0 = |B_0| \exp(i\phi_{B_0})$ erhält man

$$\begin{aligned} \phi_f^s = m\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(n_2) \operatorname{sgn}(J_1(2I_c)) + \phi_r + 2k_0 L + \phi_{B_0} + \phi_{F_0} \right. \\ \left. + \gamma \left(|F_0|^2 + |B_0|^2 + |E_f^s|^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

$m \in \mathbb{Z}$, und

$$I_c = I_p |J_1(2I_c)| \equiv H(I_c). \quad (4.3)$$

Hierbei haben wir der Übersichtlichkeit halber die dimensionslosen Intensitäten I_c und I_p eingeführt:

$$I_c = \frac{|\gamma F_0| |E_f^s|}{1 + \mu^2} \quad (4.4)$$

und

$$I_p = \frac{r_x \exp(-\alpha/2) |\gamma B_0 F_0|}{1 + \mu^2}. \quad (4.5)$$

I_c ist ein Maß für die Intensität im Resonator. Wie aus Gl. (3.30) ersichtlich, ist sie im stationären Fall proportional zur nichtlinearen Phasenverschiebung Φ_+^s . I_p mißt, wie stark der PKS gepumpt wird. Wir werden sehen, daß $I_p = 1$ die Schwelle für das Einsetzen von Selbstoszillationen im PKR ist.

Gl. (4.2) demonstriert die bekannte Tatsache, daß in phasenkonjugierenden Resonatoren im stationären Zustand die umlaufenden Felder zu den Pumpfeldern nicht nur frequenz-, sondern auch phasensynchronisiert sind.

Die transzendente Gl. (4.3) für die Intensität im Resonator kann, wie in Fig. 4.1 illustriert, graphisch gelöst werden, indem man beide Kurven $H(I_c)$ gegen I_c aufträgt und ihre Schnittpunkte bestimmt. Die Ergebnisse dieser Konstruktion sind in Fig. 4.2 als durchgezogene Linien, die I_c als Funktion der Pumpintensität I_p beschreiben, aufgetragen. Das Feld im Resonator kann jenseits dem Schwellenwert $I_p = 1$, an dem das System ein Phasenübergang zweiter Art ähnliches Verhalten aufweist, Werte größer als Null annehmen. In jenem Bereich finden sich dann mehrfache Lösungen (man beachte, daß $I_c = 0$ immer eine Lösung ist). Benachbarte Lösungsäste der $I_c(I_p)$ -Kurve sind allerdings erst im Limit $I_p = \infty$ an den Nullstellen der Besselfunktion in Gl. (4.3) verbunden. Sind die Lösungen stabil, dann lassen sich daher die mathematisch möglichen höheren Lösungsäste durch allmähliches Erhöhen der Pumpintensität nicht erreichen. Es bleibt aber immer noch die Möglichkeit, das System durch eine schnelle Veränderung der Pumpintensität soweit vom stationären Zustand zu treiben, daß es, bei dann wieder konstant gehaltener Pumpintensität, auf eine Lösung in einem höheren Ast konvergiert. Ferner können verdrauschte Pumpstrahlen Übergänge zwischen verschiedenen Lösungsästen provozieren.

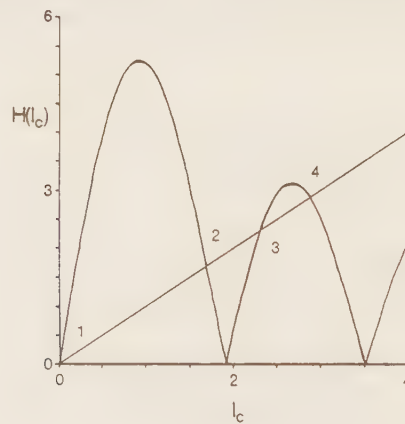


Fig. 4.1: Graphische Lösung von Gl. (4.3). Die Punkte 1-4 geben die selbstkonsistenten Lösungen an. Vielfache Lösungen sind offensichtlich möglich.

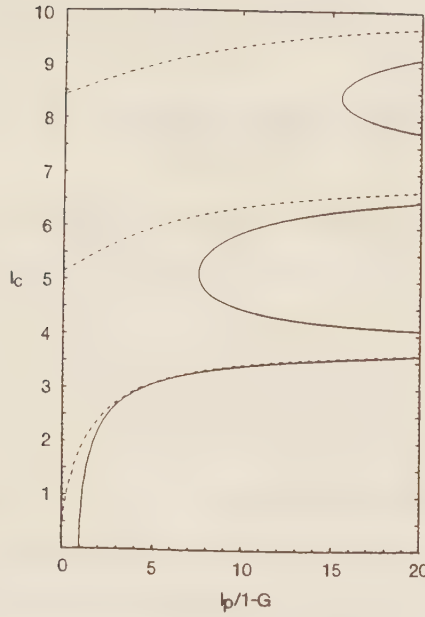


Fig. 4.2: Durchgezogene Linien: $I_c(I_p)$ -Charakteristik; gestrichelte Linien: I_c gegen $1 - G$ auf den Teilen der $I_c(I_p)$ -Charakteristik mit positiver Steigung.

4.1.2. Lineare Stabilitätsanalyse

Dieser Abschnitt untersucht die Stabilität der Lösungen aus dem vorangegangenen Abschnitt gegen kleine axiale Störungen. Kombiniert man die Gln. (3.32) und (3.33) und setzt das Ergebnis in die Gln. (3.29) und (3.30) ein, dann sieht man sofort, daß die einzigen verbliebenen unabhängigen Variablen Φ_0 und Φ_+ sind. Als nächsten Schritt in der linearen Stabilitätsanalyse addiert man kleine Störungen zu ihren stationären Werten:

$$\Phi_0(t) = \Phi_0^s + \epsilon_0(t) \quad , \quad (4.6a)$$

$$\Phi_+(t) = (I_c + \epsilon_+(t)) \exp \left[i \left(\phi_+^s + \psi_+(t) \right) \right] \quad , \quad (4.6b)$$

wobei ϵ_0 , ϵ_+ , und ψ_+ klein und reell sind, und wir explizit die Definition (4.4) von I_c verwendet haben. Die Störungen genügen den linearisierten Gleichungen:

$$\partial_t \epsilon_0(t) + \epsilon_0(t) = 2 \gamma^{-1} \tau_+^{-2} |F_0|^{-2} I_c G(I_c) \epsilon_+(t - t_c) , \quad (4.7a)$$

$$\tau_+ \partial_t \epsilon_+(t) + \epsilon_+(t) = G(I_c) \epsilon_+(t - t_c) , \quad (4.7b)$$

$$\tau_+ \partial_t \psi_+(t) + \psi_+(t) = - (\epsilon_0(t - t_c) + \psi_+(t - t_c)) . \quad (4.7c)$$

Hierbei ist

$$\tau_+ = (1 + \mu^2)^{-1} \quad (4.8)$$

und die Verstärkungsfunktion $G(I_c)$ ist durch

$$G(I_c) = 2I_c \frac{J_1'(2I_c)}{J_1(2I_c)} \quad (4.9)$$

gegeben, wobei $J_1'(y)$ die Ableitung von J_1 nach y ist.

Entwickelt man die Funktionen ϵ_0 , ϵ_+ , und ψ_+ in ein Fourier-Integral, wie

$$\epsilon_0(t) = \int_C d\nu \epsilon_0(\nu) \exp(-i\nu t) ,$$

dann erhält man schließlich die Selbstkonsistenzgleichungen

$$(1 - i\nu \tau_+^{-1}) (1 - i\nu + \exp[i\nu t_c]) (1 - i\nu - G \exp[i\nu t_c]) = 0 , \quad (4.10)$$

wobei nun ν und die Resonatorumlaufzeit t_c auf τ_+ normalisiert sind. Gl. (4.10) hat eine unendliche Anzahl komplexer Lösungen $\nu = (\omega + ig) = (\omega, g)$, wobei jede zu einer axialen Eigenmode der Störungen mit Frequenz ω und Verstärkung g korrespondiert.

Der erste Faktor auf der linken Seite von Gl. (4.10) beschreibt eine abklingende axiale Störung mit $\nu = (0, -\tau_+)$. Sie tritt schon in der Lösung der PKR-Gln. (3.29) - (3.33) mit Feld Null im Resonator ($\Phi_+ = 0$) als abklingende Phasenverschiebung Φ_0 auf. Relevant für die Stabilitätsanalyse sind der zweite Faktor, der sich auf Fluktuationen in der Phase (Gl. (4.7c)), und der dritte, der sich auf solche in der Amplitude (Gl. (4.7b)) der Phasenverschiebung Φ_+ bezieht.

Die Stabilität der Phase axialer Moden ist vom zweiten Term auf der linken Seite von Gl. (4.10) beschrieben, der sich sofort umschreiben läßt in die Bedingung

$$\frac{\exp[(-g + i\omega)t_c]}{1 - i\omega + g} = -1, \quad (4.11)$$

die bei endlichem t_c nur erfüllt werden kann für $g < 0$. Das bedeutet, daß die Phase des Feldes im Resonator für endliche t_c stabil ist. Im Grenzfall $t_c \rightarrow \infty$ (d.h. unendlicher Länge des Resonators oder instantaner Reaktion des Mediums -- man erinnere sich an die Skalierung von t_c) ist t_c der angepaßte Zeitmaßstab. Die Lösung von Gl. (4.11) mit der höchsten Verstärkung, $g = -\pi^2/2t_c^3 + O(1/t_c^4)$, die man bei der Frequenz $\omega = \pi/t_c + O(1/t_c^2)$ findet, konvergiert in diesem Limit auch im Zeitmaß t_c gegen Null. Man findet also mit wachsendem t_c abnehmende Phasenstabilität, die im Limit $t_c = \infty$ schließlich nur noch marginal ist. Der marginalen Stabilität korrespondiert ein Hüpfen in der Phase, das in Kapitel 6 beschrieben wird.

Die Stabilität gegen Fluktuationen in der Amplitude wird vom dritten Term auf der linken Seite von Gl. (4.10) beschrieben und hängt nur von der Umlaufverstärkung $G(I_c)$ und der Umlaufzeit t_c ab. Dieser Term ist Null, falls

$$\frac{G \exp[(-g + i\omega)t_c]}{1 - i\omega + g} = 1. \quad (4.12)$$

Dies ist bis auf einen entscheidenden Faktor $-G$ genau die Bedingung (4.11) für Phaseninstabilitäten. Das System ist stabil, falls $|G| < 1$, kann aber leicht instabil werden im Falle $G > 1$, in dem ein Mode bei der Pumpfrequenz ($\omega = 0$) positive Verstärkung aufweist ($g > 0$). $(1-G)$ ist in Fig. 4.2 gegen I_c als gestrichelte Linie aufgetragen. In jedem Ast der $I_c(I_p)$ -Charakteristik ist G eine monoton abfallende Funktion von I_c und variiert im ersten Ast von 1 nach $-\infty$ und in den Nachfolgenden von $+\infty$ nach $-\infty$ (der im weiteren uninteressante Bereich $G > 1$ ist nicht gezeichnet). Die Punkte unendlicher Steigung in den $I_c(I_p)$ -Kurven korrespondieren genau zum Wert $G = 1$. Dies zeigt, daß die für $G > 1$ auftretende ($\omega = 0$)-Instabilität gerade die bekannte Instabilität auf den Teilen negativer Steigung der Kennlinie ist.

Die Situation ist etwas komplizierter im Bereich einer Umlaufverstärkung $G \leq -1$, in dem Seitenbandinstabilitäten auftreten können. An der Schwelle für diese Instabilitäten ($g = 0$) erhält man aus einer Kombination von Real- und Imaginärteil von Gl. (4.12) die Beziehungen

$$\omega t_c = \arccos(1/G)$$

und

$$t_c = - \frac{1}{G} \frac{\omega t_c}{\sin(\omega t_c)} .$$

Sie sind in Fig. 4.3 in einem (G, t_c) -Phasenraum ausgewertet. Für Parameterwerte oberhalb der durchgezogenen Linie ist das System instabil, während es darunter stabil ist. Die gestrichelte Linie in dieser Figur gibt die Verstimmung der instabilen Mode gegen die Pumpfrequenz ω_0 an der Instabilitätsschwelle an. Im Grenzfall $t_c \rightarrow \infty$ wird die dynamische Instabilität eine "2 t_c "-Instabilität bei $G = -1$. Im Falle eines extrem trägen Mediums ($t_c \rightarrow 0$) verschwinden die dynamischen Instabilitäten vollständig.

Am Schluß ist noch festzustellen, daß die $I_c = 0$ Lösung (kein Feld im Resonator) stabil ist für $I_p < 1$. Sie wird bei $I_p = 1$ instabil und das System entwickelt spontan ein endliches Feld im Resonator. $I_p = 1$ ist exakt der Punkt, an dem die Verstärkung des PKS die Verluste im Resonator kompensiert (siehe Gl. (4.5)), was auch der intuitiven Erwartung entspricht.

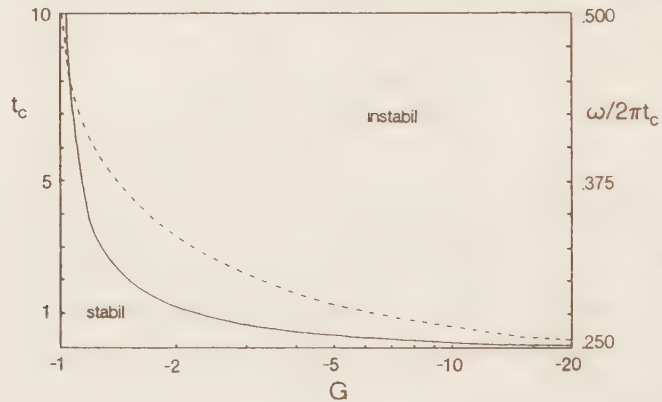


Fig. 4.3: Die durchgezogene Linie trennt den stabilen vom instabilen Bereich im (G, t_c) -Raum. Die gestrichelte Linie gibt die Verstimmung der an der Stabilitätsgrenze instabilen axialen Mode gegen die Pumpfrequenz an.

4.2. Transversale Stabilitätsanalyse

In diesem Kapitel erweitern wir die Stabilitätsanalyse des vorangegangenen Abschnitts und beziehen transversale Störungen mit ein.

4.2.1. Formalismus

Wir betrachten explizit eine transversale Störung mit der Frequenz $\omega_0 \pm \omega$ und dem transversalen Wellenvektor

$$\kappa = k\theta\eta . \quad (4.13)$$

Hierbei ist η der auf θ normalisierte Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung der Störung und der Resonatorachse. Zu beachten ist, daß bei abwechselnder Reflektion an einem konventionellen und einem phasenkonjugierenden Spiegel gleichzeitig Störungen bei den Winkeln η und $-\eta$ auftreten.

Der erste Schritt der Stabilitätsanalyse ist nun, die stationären Felder E_f^s und E_b^s durch

$$E_{f(b)}(x,t) = E_{f(b)}^s(x) + e_{f(b)}(\eta, \nu, x) e^{i(\kappa x - \nu t)} + e_{f(b)}(-\eta, -\nu^*, x) e^{-i(\kappa x - \nu^* t)} , \quad (4.14)$$

und ganz analog die nichtlinearen stationären Phasenverschiebungen Φ_0^s und Φ_+^s zu ersetzen. O.B.d.A. legen wir $\eta \geq 0$ fest.

Konsistent mit der Diskussion in Kapitel 4.1 vernachlässigen wir die Effekte der transversalen Diffusion und der Beugung auf die Profilkfunktionen ($e_{f(b)}$, ..), d.h. ihre inverse Breite (als Maß für die Breite ihres räumlichen Fourier-Spektrums) genügt $1/w' \ll \ell_T^{-1}, \pi \mathcal{F}_r^{1/2}$. Wir behalten jedoch die Effekte der transversen Diffusion auf die Phasenfaktoren $\exp(\pm i\kappa x)$ bei, indem wir $\kappa \gg 1/w'$ zulassen. In dieser Näherung ist die Propagation (3.33) durch

$$e_f(\eta, \nu, x + \kappa/\pi \mathcal{F}_r) \exp(-i\nu t_c) = r \exp(i(\phi_r + 2k_0 L - \kappa^2/2\pi \mathcal{F}_r)) e_b(\eta, \nu, x) \quad (4.15)$$

gegeben, wobei wir zur Vereinfachung $u = \infty$ angenommen haben. Diese Annahme scheint auf den ersten Blick der Diskussion, die Gl. (3.32) vorausgeht, zu widersprechen,

aber dies braucht nicht der Fall zu sein: Zusätzlich zur mechanischen Apertur u am konventionellen Spiegel werden die verschiedenen Streuordnungen auch durch das Reflektionsprofil des PKS selektiert, dessen Breite grob durch die Breite w_0 der Pumpstrahlen gegeben ist. In der Tat kann man sich im hier betrachteten Fall eines ebenen Spiegels leicht klarmachen, daß der PKS allein die erste Streuordnung selektiert, wenn

$$\sigma = L\theta/2w_0 \gg 1 \quad (4.16)$$

erfüllt ist.

Als nächsten Schritt setzt man Gl. (4.14) und die entsprechenden Ausdrücke für Φ_0 und Φ_+ in die Gln. (3.29) - (3.33) ein, linearisiert um die stationäre Lösung und eliminiert die Profilfunktionen von Φ_0 und Φ_+ . Dies liefert

$$\begin{bmatrix} e(\eta, \nu, x + 4\sigma\eta) \\ e^*(-\eta, -\nu^*, x - 4\sigma\eta) \end{bmatrix} = e^{i\nu t_c} \mathcal{D}(\eta, \nu, x) \begin{bmatrix} e(\eta, \nu, x) \\ e^*(-\eta, -\nu^*, x) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

wobei ν und t_c auf die Zeit τ_+ normalisiert sind und wir die Beziehung $4\sigma\eta = \kappa/\pi\mathcal{F}_r$ benützt haben. Die Elemente d_{ij} ($i=1,2$; $j=1,2$) der 2×2 - Matrix $\mathcal{D}(\eta, \nu, x)$ sind

$$d_{11}(\eta, \nu, x) = 0, \quad d_{22}(\eta, \nu, x) = 0, \quad (4.18a)$$

$$d_{12}(\eta, \nu, x) = \frac{1}{b_+(\eta) - i\nu} e^{-i\zeta} e^{2i\phi_f^s(x)} I_p(x), \quad (4.18b)$$

$$d_{21}(\eta, \nu, x) = \frac{1}{b_-(\eta) - i\nu} e^{i\zeta} e^{-2i\phi_f^s(x)} I_p(x), \quad (4.18c)$$

für $I_c(x) = 0$, und

$$d_{11}(\eta, \nu, x) = \left[\frac{i Q(x)}{b_0(\eta) - i\nu\tau_+^{-1}} + \frac{1}{b_-(\eta) - i\nu} \frac{G(x) - 1}{2} \right] e^{-i\zeta}, \quad (4.19a)$$

$$d_{12}(\eta, \nu, x) = \left[\frac{i Q(x)}{b_0(\eta) - i\nu\tau_+^{-1}} + \frac{1}{b_+(\eta) - i\nu} \left(1 + \frac{G(x) - 1}{2} \right) \right] e^{-i\zeta} e^{2i\phi_f^s(x)}, \quad (4.19b)$$

$$d'_{21}(\eta, \nu, x) = \left[\frac{-i Q(x)}{b_0(\eta) - i\nu\tau_+^{-1}} + \frac{1}{b_-(\eta) - i\nu} \left[1 + \frac{G(x) - 1}{2} \right] \right] e^{i\zeta} e^{-2i\phi_f^s(x)}, \quad (4.19c)$$

$$d'_{22}(\eta, \nu, x) = \left[\frac{-i Q(x)}{b_0(\eta) - i\nu\tau_+^{-1}} + \frac{1}{b_+(\eta) - i\nu} \frac{G(x) - 1}{2} \right] e^{i\zeta}, \quad (4.19d)$$

für $I_c(x) > 0$. Hierbei sind

$$Q(x) = (1 + \mu^2)^2 \frac{(I_c(x))^2}{\gamma |F_0(x)|^2}, \quad (4.20a)$$

$$b_{\pm}(\eta) = (1 + \mu^2(1 \pm \eta)^2) \tau_{\pm}, \quad b_0(\eta) = 1 + \mu^2\eta^2, \quad (4.20b)$$

und die Phasenverschiebung aufgrund der transversalen Propagation im Resonator wurde mit

$$\zeta = \frac{\kappa^2}{2\pi\mathcal{F}_r} \quad (4.20c)$$

bezeichnet.

Die nichtdiagonalen Elemente in $\mathcal{D}$ beschreiben die phasenkonjugierte Reflektion vom PKS, d.h. koppeln (η, ν) mit $(-\eta, -\nu^*)$ Moden. Die diagonalen Elemente stellen die gewöhnliche Reflektion vom PKS dar und koppeln identische Moden. Gl. (4.17) verknüpft i.a. eine unendliche Menge von Punkten und verlangt daher die simultane selbstkonsistente Lösung eines unendlichen Satzes komplexer skalarer Gleichungen. Wir behandeln in den folgenden beiden Abschnitten zwei Fälle, in denen dieses System auf einen endlichen Satz reduziert werden kann.

4.2.2. Verhalten an der Resonatorschwelle

Zunächst betrachten wir den Einfluß transversaler Störungen auf die Schwelle für Selbstoszillationen des PKR. Unterhalb der Schwelle ist $I_c(x) = 0$ und die diagonalen Elemente der Matrix $\mathcal{D}(x)$ verschwinden. Gl. (4.17) koppelt dann jeweils nur Paare von Punkten im Abstand $4\sigma\eta$ auf der Oberfläche des PKS. Für die Kopplung der Punkte x und $x - 4\sigma\eta$ erhält man aus den Gln. (4.17) und (4.18) sofort folgende

Selbstkonsistenzgleichung für ν :

$$\exp(2i\nu t_c) \exp \left[2i \left(\phi_f^s(x - 4\sigma\eta) - \phi_f^s(x) \right) \right] g_2(\mu, \eta, \nu) \mathcal{P}(x, \sigma\eta) = 1, \quad (4.21)$$

wobei

$$\mathcal{P}(x, \sigma\eta) = I_p(x - 4\sigma\eta) I_p(x) \quad (4.22a)$$

ein Profilparameter der Pumpstrahlen und

$$g_2(\mu, \eta, \nu) = \frac{(1 + \mu^2)^2}{(1 + \mu^2 (1 - \eta)^2 - i\nu\tau_+^{-1}) (1 + \mu^2 (1 + \eta)^2 - i\nu\tau_+^{-1})} \quad (4.22b)$$

ein Verstärkungsfaktor ist, der von der Diffusionsstärke μ und dem Winkel η zwischen der betrachteten Mode und der Resonatorachse abhängt.

Wir konzentrieren uns auf Gauss'sche Pumpfelder

$$I_p(x) = I_p(0) e^{-2x^2}, \quad (4.23a)$$

und rechteckige Pumpfelder

$$\begin{aligned} I_p(x) &= I_p(0) \quad \text{for } -1 \leq x \leq 1 \\ &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \quad (4.23b)$$

Zunächst zeigen wir, an welcher Stelle x und bei welcher Frequenz ω eine Mode mit vorgegebenem Winkel η zuerst instabil wird. Im Falle Gauss'scher Pumpfelder (4.23a) ist $\mathcal{P}(x, \sigma\eta)$ maximal bei $x = 2\sigma\eta$. An dieser Stelle verschwindet zudem der Phasenfaktor $\phi_f^s(x - 4\sigma\eta) - \phi_f^s(x)$ in Gl. (4.21). Beachtet man, daß der g_2 -Faktor bei $\omega = 0$ sein Maximum hat, so ist klar, daß die transversale Instabilität zuerst bei $x = 2\sigma\eta$ mit der Frequenz ω_0 der Pumpstrahlen auftritt. Im Fall rechteckiger Pumpfelder (4.23b) ist $\mathcal{P}(x, \sigma\eta) = 0$, wenn $\eta > 1/2\sigma$, d.h. diese Moden weisen überhaupt keine Verstärkung auf. Andernfalls erhält man den konstanten Wert $\mathcal{P}(x, \sigma\eta) = (I_p(0))^2$ für alle Punkte x im Intervall $\mathcal{I}(\sigma\eta) = [-1+4\sigma\eta, 1]$ und $\mathcal{P}(x, \sigma\eta) = 0$ sonst. Wie im Falle Gauss'scher Pumpfelder treten die Instabilitäten zuerst bei der Frequenz ω_0 der Pumpstrahlen auf, aber nicht nur am Punkt $x = 2\sigma\eta$, sondern zusätzlich auf einem ganzen Band $\mathcal{I}$ von

Punkten.

In beiden Fällen gibt das Maximum von $\mathcal{P}(2\sigma\eta, \sigma\eta)g_2(\mu, \eta, 0)$ den Winkel η_{th} an, an dem die erste Mode ($\omega = 0$) instabil wird. Der Verstärkungskoeffizient $g_2(\mu, \eta, 0)$ ist in Fig. 4.4 als Funktion des normalisierten Winkels η und des Diffusionsparameters μ aufgetragen. In Fig. 4.5 ist $\mathcal{P}(2\sigma\eta, \sigma\eta)$ für beide Pumpstrahlprofile mit durchgezogenen Linien und $g_2(\mu, \eta, 0)$ für charakteristische Werte von μ mit gestrichelten Linien gezeichnet. Drei Fälle lassen sich unterscheiden:

(1) Ohne Diffusion ($\mu = 0$) ist $g_2(0, \eta, 0) = 1$, d.h. unabhängig von η und $\mathcal{P}(2\sigma\eta, \sigma\eta)$ allein bestimmt η_{th} . Man sieht sofort, daß das Gauss'sche Pumpprofil (4.23a) nur eine axiale Instabilität bei $\eta_{th} = 0$ und $x = 0$ zuläßt. Im Gegensatz dazu treten beim rechteckigen Pumpprofil (4.23b) an allen Punkten im Intervall $x \in [-1, 1]$ gleichzeitig eine axiale ($\eta_{th} = 0$) und transversale Instabilitäten bei der Pumpintensität $I_p(0) = 1$ auf.

(2) Für $0 < \mu \leq 1$ weist g_2 ein einziges Maximum bei $\eta_{th} = 0$ auf, so daß nur axiale Moden bei $I_p(0) = 1$ instabil werden.

(3) Für $\mu > 1$ hat g_2 ein Minimum $g_2(\mu, 0, 0) = 1$ bei $\eta = 0$ und ein Maximum $g_{max} = (1 + \mu^2)^2 / 4\mu^2$ bei $\eta_{max} = \sqrt{1 - 1/\mu^2}$. Transversale Moden haben einen größeren g_2 -Verstärkungsfaktor als die axiale Mode. Berücksichtigt man jedoch die Pumpprofile, dann sieht man, daß für Gauss'sche Pumpstrahlen (4.23a) die transversalen Moden von $\mathcal{P}(x, \sigma\eta)$ derart abgeschwächt werden, daß die axiale Instabilität dominant bleibt. Sie tritt wieder bei $x = 0$ bei der Pumpintensität $I_p(0) = 1$ auf. (Der Korrektheit halber ist noch darauf hinzuweisen, daß im Grenzfall $\mu \rightarrow \infty$ infolge der Divergenz von $g_2(\infty, \eta, 0)$ bei $\eta = 1$, transversale Moden im Winkelbereich $1 + \exp(-8\sigma^2) > \eta > 1 - \exp(-8\sigma^2)$ eine höhere Verstärkung g als axiale Moden haben. Bedingung (4.16)) beschränkt diesen Bereich auf $\eta \simeq 1$, d.h. in Richtung der nullten und zweiten Streuordnung vom PKS. Dieser Fall liegt daher außerhalb des Gültigkeitsbereichs unseres Modells.)

Die Situation ist etwas verwickelter im Fall rechteckiger Pumpprofile: Falls $\eta_{max} \geq 1/2\sigma$, wird eine einzelne Mode anfänglich instabil. Sie wird im Winkel $\eta_{th} = 1/2\sigma$ zwischen $x = -1$ und $x = +1$ hin- und herreflektiert (siehe Fig. 4.5). Andernfalls weisen alle Punkte im Intervall $\mathcal{I}(\sigma\eta_{max}) = [-1 + 4\sigma\eta_{max}, 1]$ gleichzeitig eine transversale Instabilität bei $\eta_{th} = \eta_{max}$ auf. Um die verschiedenen Streuordnungen zu trennen, haben wir $\sigma \gg 1$ angenommen (siehe (4.16)); dies impliziert $\eta_{th} \ll 1$ und in Folge $g_2(\mu, \eta_{max}, 0) \simeq 1$. Die Instabilitäten, d.h. Selbstoszillationen des PKR, treten daher bei einer gegen den Wert 1 aus der axialen Analyse nur leicht reduzierten Pumpintensität $1 > I_p(0) \geq 1 - \eta_{th}^2$ auf.

Festzuhalten ist also, daß bei Gauss'schen Pumpstrahlen unmittelbar oberhalb der

gegenüber der axialen Analyse unveränderten Resonatorschwelle $I_p(0) = 1$ generell eine axiale Modenstruktur im PKR zu erwarten ist. Dagegen kann bei Pumpstrahlprofilen, die im Zentrum flacher als Gauss'sch sind, bei hinreichend starker Diffusion ($\mu > 1$) eine transverse Modenstruktur bei einer unwesentlich gegen eins reduzierten Resonatorschwelle $I_p(0)$ indiziert sein kann.

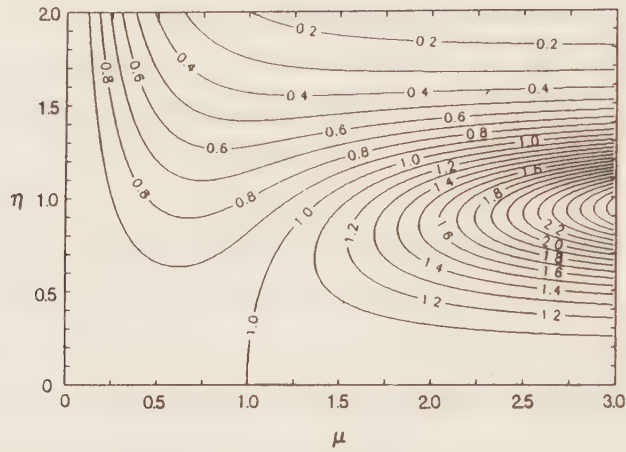


Fig. 4.4: Verstärkungsfaktor g_2 als Funktion der Diffusionsstärke μ und des Winkels η zwischen transversaler Mode und Resonatorachse. $\mu = 1$ ist offensichtlich ein Schwellenwert.

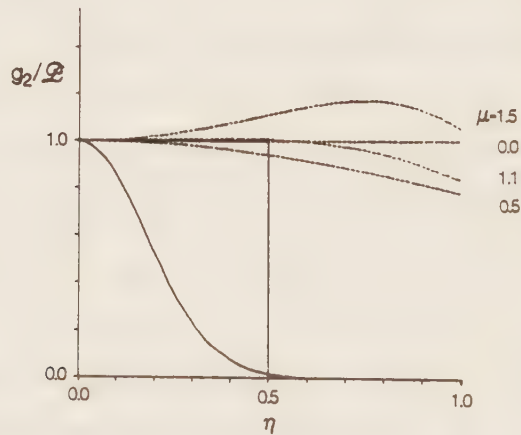


Fig. 4.5: Durchgezogene Linien: Auf $I_p(0) = 1$ normierte Profilparameter $\mathcal{P}$ für rechteckiges- und Gauss'sches Pumpprofil als Funktion von η ($\sigma = 1$); gestrichelte Linien: Verstärkungsfaktor g_2 für charakteristische Werte von μ als Funktion von η .

4.2.3. Verhalten oberhalb der Resonatorschwelle

Wir wenden uns nun der Stabilität der stationären Mode oberhalb der Resonatorschwelle zu ($I_c > 0$). Um die Analyse zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall $4\sigma\eta \ll w' \ll 1$, in dem die stationäre Mode über die Breite w' der Störung als ebene Welle approximiert werden kann. Dann kann man die transversale Variation der Matrix $\mathcal{D}(\eta, \nu, x)$ über die Breite der Störung und die transversalen Kopplungsterme $\pm 4\sigma\eta$ in Gl. (4.17) vernachlässigen. Zu beachten ist, daß zusätzlich $\sigma \gg 1$ erfüllt sein muß, um die verschiedenen Streuordnungen zu trennen (siehe Gl. (4.16)). Dies schränkt die Diskussion auf Moden im Winkel $\eta \ll 1$ zur Resonatorachse ein. Unter Annahme nicht allzu großer Diffusionsstärke μ setzen wir daher $\eta = 0$ in der Matrix $\mathcal{D}(\eta, \nu, x)$ ein (siehe Gl. (4.20b)).

Diese Annahmen reduzieren Gl. (4.17) auf eine lokale zweidimensionale Matrixgleichung. Die (komplexen) Eigenfrequenzen $\nu_{\pm}$ der Moden sind daher durch

$$\frac{\exp(i\nu_{\pm} t_c)}{1 - i\nu_{\pm}} K_{\pm}(\nu_{\pm}) = 1 \quad (4.24)$$

gegeben, wobei $K_{\pm}(\nu)/(1-i\nu)$ die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{D}(\nu)$ sind. Diese sind implizit gegeben durch (siehe Gl. (4.19))

$$K_+(\nu) + K_-(\nu) = (G - 1) \cos(\zeta) + \frac{1 - i\nu}{1 - i\nu\tau_+^{-1}} 2Q \sin(\zeta) , \quad (4.25a)$$

$$K_+(\nu)K_-(\nu) = -G . \quad (4.25b)$$

Im Fall $\mu = 0$ (keine transversale Diffusion) wird $K_{\pm}$ unabhängig von ν :

$$K_{\pm}(\zeta) = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{(G - 1)^2 + 4Q^2} \cos(\zeta + \zeta_0) \pm \sqrt{((G - 1)^2 + 4Q^2) \cos^2(\zeta + \zeta_0) + 4G} \right] , \quad (4.26)$$

wobei ζ durch Gl. (4.20c) definiert und ζ_0 durch

$$\zeta_0 = \text{sgn}(n_2) \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{G-1}{2|Q|} \right) \right] , \quad (4.27)$$

mit $-\pi/2 \leq \text{artan}() \leq 0$, gegeben ist.

Fig. 4.6a zeigt die Amplitude von K_+ als Funktion von I_p und ζ für stationäre Lösungen auf dem ersten Ast der $I_c(I_p)$ Charakteristik. Es wird ein transparentes ($\alpha = 0$) fokussierendes Medium betrachtet. Den korrespondierenden defokussierenden Fall erhält man, indem man die Figur von oben nach unten liest. K_- erhält man aus $K_+(\zeta) = -K_-(\zeta + \pi)$.

Außer im Fall $t_c = \infty$ determiniert K_+ die Moden mit höchster Verstärkung. Es erreicht bei $\zeta = \zeta_{2n+1} = -\zeta_0 + (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, seine maximale Amplitude $|K_+| > 1$ und ist dort zugleich reell und positiv. Offensichtlich weisen dort Moden bei der Frequenz ω_0 der Pumpstrahlen ($\omega = 0$) positive Verstärkung auf (siehe Gl. (4.24)). Dies sind zugleich auch die instabilsten Moden (außer im Fall $t_c = \infty$, in dem Moden bei $\zeta = \zeta_{2n}$ mit Frequenzen $\omega_{\infty, m} = \omega_m t_c = (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, dieselbe Verstärkung haben). Diese Resultate sind in den Figuren 4.6b,c illustriert, die die Verstärkung der instabilsten Mode als Funktion von I_p und ζ in den Grenzfällen $t_c = \infty$ und $t_c = 0$ zeigen. Die Parameter sind dieselben wie in Fig. 4.6a, und der korrespondierende defokussierende Fall kann wieder erhalten werden, indem man die Figuren von oben nach unten liest.

Am Schluß soll noch erwähnt werden, daß das wesentliche Resultat dieses Abschnitts, daß nämlich die stationäre axiale Mode generell instabil gegen transversale Störungen ist, auch gültig bleibt, wenn transversale Diffusion eingeschlossen ist ($\mu > 0$). Dies sieht man folgendermaßen: Trägt man für den Parametersatz γ , I_c , $F_0(\mu)$, wobei $F_0(\mu) = F_0(0) (1 + \mu^2)$, die Verstärkung g der ($\omega = 0$)-Lösungen von Gl. (4.24) gegen μ und ζ auf, dann erhält man μ -unabhängige Stabilitätsgrenzen $g(\mu, \zeta) = 0$. Das folgt einfach aus der Tatsache, daß aufgrund der speziellen Wahl von $F_0(\mu)$ Q in Gl. (4.25a) unabhängig von μ ist (siehe Def. (4.20a)) und an der Stabilitätsgrenze sein Vorfaktor den μ -unabhängigen Wert Zwei hat. Jeder instabilen ($\omega = 0$)-Mode im Fall $\mu = 0$ (und solche existieren) korrespondiert daher eine instabile ($\omega = 0$)-Mode im Fall $\mu > 0$.

5. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: LANGSAMES MEDIUM

Im restlichen Teil dieser Arbeit studieren wir das volle dynamische Verhalten des PKR mittels numerischer Integration der Gln. (3.29) - (3.33). Um die Anzahl der freien Parameter zu reduzieren, betrachten wir ausschließlich PKR'n mit perfekt reflektierendem konventionellem Spiegel ($r = 1$), transparentem Medium ($\alpha = 0$), und vernachlässigbaren transversalen diffusiven Effekten ($\ell_T = 0$, $\mu = 0$). Letzteres läßt sich generell durch hinreichend breite Pumpstrahlen ($\ell_T \simeq 0$) und kleinen Winkel θ zwischen Pumpstrahlen und Resonatorachse ($\mu = k\ell_T\theta = k_0L_D\theta \simeq 0$) erreichen. Man beachte, wie aus der Darstellung von μ in unskalierten Größen zu ersehen ist, daß eine Verbreiterung der Pumpstrahlen allein zwar $\ell_T \rightarrow 0$ liefert, aber μ invariant läßt. Ferner haben wir zwei Konventionen gewählt, die den Vergleich verschiedener simulierter Fälle anhand der Figuren erleichtern: Im Resonator gemessene Felder und Intensitäten sind auf die Pumpstärke $I_p(0)^{1/2}$ bzw. $I_p(0)$ normiert. Dies erlaubt den schnellen Vergleich der Effizienz der Phasenkonjugation d.h. des Konversionsgrades von Pumpintensität in Intensität im Resonator. Alle räumlichen Fourier-Frequenzen sind auf die Frequenz $\kappa_n = \pi\mathcal{F}_r$ normiert, d.h. auf die Frequenz optischer Strahlen, die Punkte im Abstand 1 auf dem PKS verbinden. In dieser Normierung ist die Phasenverschiebung ζ einer Fourier-Komponente κ durch $\zeta = \pi\mathcal{F}_r\kappa^2/2$ gegeben.

In diesem Kapitel betrachten wir einen PKR mit langsamem Medium ($t_c = 0$) und ebenem Spiegel ohne mechanische Apertur ($R = \infty$, $u = \infty$) in einer Geometrie mit niedriger ($\mathcal{F}_r = 100$) und einer mit hoher ($\mathcal{F}_r = 2$) Beugung.

Die numerischen Lösungen der Gln. (3.29) - (3.33) wurden folgendermaßen erhalten: Kombiniert man die Gln. (3.32) und (3.33) und setzt das Ergebnis in die Gln. (3.29) und (3.30) ein, dann erhält man für die Variablen Φ_0 und Φ_+ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Für die Zeitintegration dieser Gleichungen wurde ein Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung benützt. Die Propagation des Feldes im Resonator wurde mittels einer Schnellen-Fourier-Transformation- (SFT) Routine simuliert, die auch die Diskretisierung der transversalen Koordinate in N Werte $x_i = -a + (i - 1)2a / N$, $i = 0, \dots, N-1$, festlegt. Hierbei ist $N = 2^n$ die Anzahl der Komponenten in der SFT und $[-a, a]$ das räumliche Intervall, auf dem die Fourier-Transformation ausgeführt wird (für eine hervorragende Einführung in die Probleme und Möglichkeiten der SFT sei auf [70; 71] verwiesen). Die Numerik wurde geprüft, indem typische Resultate mit reduzierter zeitlicher Schrittweite und/oder vergrößertem Intervall $[-a, a]$ und Anzahl der Komponenten in der SFT gerechnet wurden. Jeder Schritt der

numerischen Prozedur wurde voll vektorisiert auf einem Vektorrechner gerechnet, was gegenüber einer nichtoptimierten Version einen Faktor $\simeq 10$ an Rechenzeit eingespart hat.

5.1. Resonator mit niedriger Beugung

Zunächst studieren wir das Verhalten des PKR in einer Geometrie mit niedriger Beugung ($\mathcal{F}_r = 100$). Wir analysieren sowohl den Fall zweier Gauss'scher Pumpstrahlen mit Breite w_0 , als auch den Fall einer ebenen Welle F_0 und eines Gauss'schen Pumpstrahls B_0 . Die wichtigsten Ergebnisse der numerischen Analyse sind:

(1) In allen Simulationen setzten Selbstoszillationen im PKR bei der Schwellenintensität $I_p(0) \simeq 1$ ein. Unmittelbar oberhalb der Schwelle wies E_b die Frequenz ω_0 der Pumpstrahlen auf und hatte keine signifikanten Seitenbänder im räumlichen Fourier-Spektrum.

(2) Im Falle eines defokussierenden Mediums und Gauss'scher Pumpstrahlen gleicher Intensität, die präzise auf den PKS fokussiert waren, überlebte die axiale Feldmode E_b bei der Frequenz der Pumpstrahlen bis $I_p(0) \simeq 3.3$. Weiteres Erhöhen von $I_p(0)$ führte zum Einsatz einer Seitenmodeinstabilität. Darüberhinaus fanden wir, daß sich die Schwellenintensität für diese Instabilität deutlich verringern ließ, wenn man der Phase von B_0 eine fokussierende Krümmung gab, d.h. den PKS vor dem Fokus des Pumpstrahls B_0 platzierte. Die Seitenmodeinstabilität ist in Fig. 5.1 für den Fall $B_0(x) \propto \exp(-4ix^2)$ und $I_p(0) = 2.4$ illustriert. E_b ist periodisch mit einer Periode von ungefähr 19τ (zur Erinnerung, τ ist die Mediumreaktionszeit). Die Fig. 5.1a und 5.1b zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$ am Anfang und nach der Hälfte einer Periode. Die Fig. 5.1c and 5.1d zeigen die Phase $\phi_b(x) - \phi_b(0)$ und die Fig. 5.1e und 5.1f das räumliche Fourier-Spektrum von $E_b(x)$ zu diesen Zeiten. Fig. 5.1 weist klar auf eine (Ebene-Wellen-artige) Modulationsinstabilität im zentralen Bereich von E_b hin: Das Feld zeigt eine sich selbst wiederholende transversale Struktur im Intervall $x \in [-.3, .3]$, wie man sie von einer derartigen Instabilität erwartet. Konsistent damit findet man im Fourier-Spektrum eine dominierende Seitenmode mit dem Maximum bei $\zeta \simeq \pi$ (man beachte $\zeta = \pi \mathcal{F}_r \kappa^2 / 2$), die in Fig. 5.1e in eine ($\zeta \simeq \pi$) und eine ($\zeta \simeq 3\pi$)-Mode aufgelöst ist. Beide die ($\zeta \simeq \pi$)- und die ($\zeta \simeq 3\pi$)-Phasenverschiebung liegen in dem von der transversalen Stabilitätsanalyse in Kapitel 4.3 her erwarteten Bereich.

(3) Im Fall eines fokussierenden Mediums, einer ebenen Welle F_0 mit Intensität 1 und eines Gauss'schen, auf den PKS fokussierten Pumpstrahls B_0 , haben wir ein Frequenzfilter mit der Breite 0.5 in den Resonator eingebracht. Die Filterung

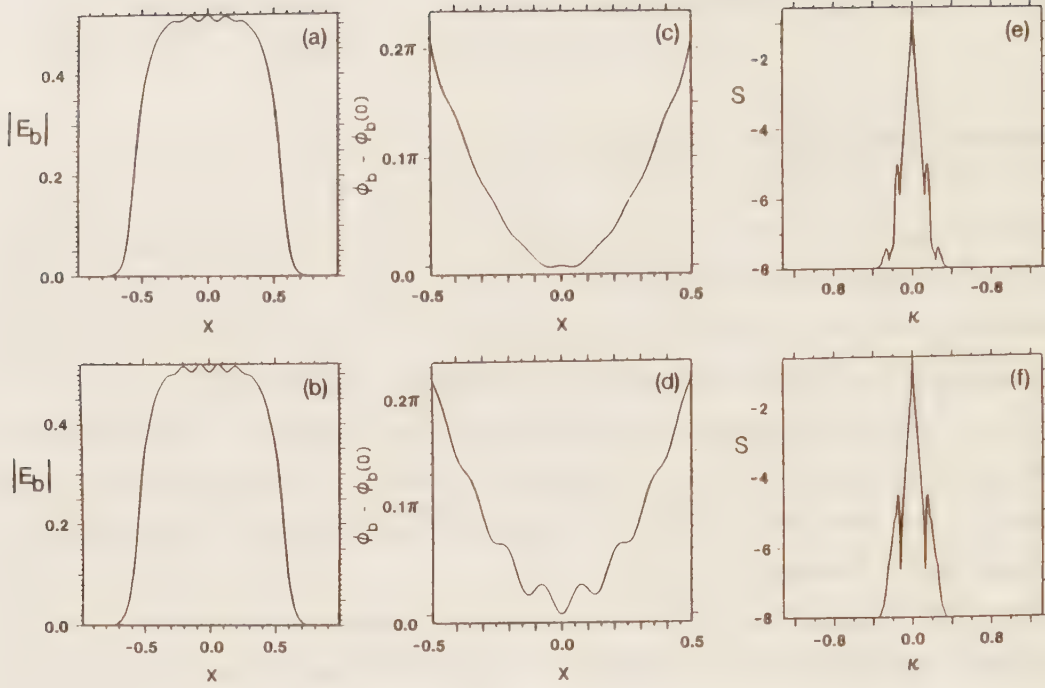


Fig. 5.1: Modulationsinstabilität im Fall einer Geometrie mit niedriger Beugung ($\mathcal{F}_r = 100$) und einem defokussierenden Medium ($n_2 < 0$) bei $I_p(0) = 2.4$, $F_0 = I_p(0)^{1/2} \exp(-x^2)$, $B_0(x) = I_p(0)^{1/2} \exp(-(1+4i)x^2)$. Die Fign. (a), (c) und (e) zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$, die Phase $\phi_b(x) - \phi_b(0)$ und das räumliche Fourier-Spektrum $S(\kappa)$ von $E_b(x)$; hierbei ist $S(\kappa) = \log_{10}(|\text{FT}(E_b)|^2)$. Die Fign. (b), (d) und (f) zeigen dieselben Funktionen eine halbe Periode später. κ ist auf $\kappa_n = \pi \mathcal{F}_r$ und alle Feldamplituden sind auf $I_p(0)^{1/2}$ skaliert.

transversaler Frequenzen erlaubt kürzere Rechenzeiten und kann auf das Verhalten des PKR stabilisierend wirken, was im folgenden noch detaillierter beschrieben wird. In diesen Simulationen war eine transversale Mode mit der Pumpfrequenz ω_0 schon bei $I_p(0) \simeq 1.1$ angeregt. Erhöhen von $I_p(0)$ führte zunächst zu einem periodischen Verhalten, das in Fig. 5.2 für $I_p = 1.2$ dargestellt ist. Im dargestellten Fall war die Oszillationsperiode ungefähr 33τ . Die Fign. 5.2a und 5.2b zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$ im Zeitabstand einer halben Periode. Die Breite und Form von E_b ändert sich signifikant während einer Periode. In Fig. 5.2b ist die Breite des zentralen Peaks kleiner als 0.1 und die korrespondierende Fresnel-Zahl hat ungefähr den Wert $\mathcal{F}_r(0.1)^2 = 1$, was auf starke Beugung hinweist. Eine weitere Erhöhung der Pumpintensität führte schon bei $I_p(0) = 1.3$ zu komplexer Dynamik. Die Entwicklung des Feldes fand sich, nach einer Integration der Bewegungsgleichungen über einen Zeitraum von mehr als 1000

Mediumreaktionszeiten τ , auf keinem periodischen oder einfachen quasiperiodischen Zustand ein. Hielt man andererseits $I_p(0) = 1.2$ fest, aber vergrößerte die Breite des Fourier-Filters von 0.5 auf 0.6, so wurde die Symmetrie des Feldes um $x = 0$ gebrochen. Das transversale Verhalten des Feldes wurde zunehmend komplexer. Eine Analyse der Zeitentwicklung ließ eine kurze Periode $\simeq 20$ und eine lange Periode $\simeq 435$ vermuten. Im Gegensatz hierzu weist der Fall eines defokussierenden Mediums unter denselben Bedingungen immer noch die einfache axiale Mode bei der Pumpfrequenz auf.

Die größere Stabilität der axialen Mode in PKR'n mit defokussierenden Medien kann intuitiv anhand folgendem Argument verstanden werden: In diesem Falle wirkt der $\exp(i\Phi_0)$ Faktor in Gl. (3.32) als defokussierende 'Linse' vor dem PKS. Diese Linse unterstützt den defokussierenden Effekt der Beugung im Resonator und führt zu breiteren Moden, die den Rändern der Pumpstrahlen näher kommen. Als Konsequenz ist die Verstärkung von Moden höherer Ordnung reduziert. Man beachte jedoch, daß (2) und (3) nicht unmittelbar verglichen werden können, da der Pumpstrahl F_0 jeweils ein anderes Profil hat.

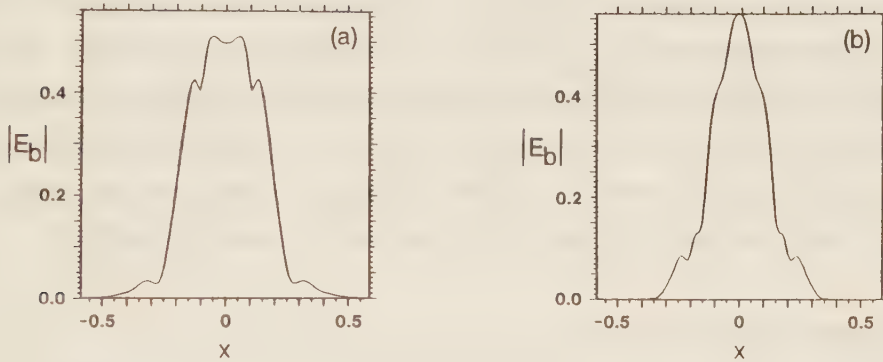


Fig. 5.2: Instabilität im Fall einer Geometrie mit niedriger Beugung ($\mathcal{F}_r = 100$), einem fokussierenden Medium ($n_2 > 0$) und einem räumlichen Fourier-Filter der Breite 0.5 im Resonator bei $I_p(0) = 1.2$, $F_0 = 1$, $B_0(x) = I_p(0)\exp(-x^2)$. (a) und (b) zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$ im Zeitabstand einer halben Periode. Die vertikalen Achsen sind auf $I_p(0)^{1/2}$ skaliert.

Hier bietet sich nun ein Vergleich mit den analytischen Ergebnissen aus dem vorangegangenen Kapitel an, die sich auf den Grenzfall $\mathcal{F}_r \rightarrow \infty$ beziehen. Zunächst ist festzustellen, daß die Resonatorschwellen übereinstimmen und daß Beugung die Schwelle für transversale (Ebene-Wellen-artige) Modulationsinstabilitäten von der

Resonatorschwelle weg zu höheren Pumpintensitäten hin verschiebt. Zudem findet sich in der Simulation auch der Fall, daß unterhalb der Schwellenintensität für den Einsatz einer Modulationsinstabilität eine Instabilität mit starker Beugung unterliegendem Feld E_b auftritt. Die verschiedenen möglichen Instabilitäten lassen sich folgendermaßen einsehen: An der Resonatorschwelle hat eine Eigenmode der linearisierten Gln. (3.29) - (3.33) genau Verstärkung eins, während alle übrigen (höheren) Moden abklingen. (Die Verstärkung der höheren Eigenmoden nähert sich mit wachsendem $\mathcal{F}_r$ dem Wert 1). Alle Eigenmoden mit hoher Verstärkung sind auf einen schmalen Bereich um $x = 0$, in dem die Pumpintensität am höchsten ist, konzentriert und weisen starke Beugung auf. Erhöht man nun die Pumpintensität, dann wächst das Feld im Resonator auf Werte größer als null an, und nichtlineare Kopplung zwischen den Eigenmoden der linearisierten Gleichungen setzt ein. Als Folge verschiebt sich deren Verstärkung relativ zueinander. Mit wachsender Kopplung (wachsendem I_p) verliert die (linearisierte) Grundmode ihre Vorzugsstellung und dynamisches Verhalten, das vom Wettkampf weniger Moden gekennzeichnet ist, kann sich einstellen. Dies scheint im Fall (3) vorzuliegen. Es kann aber auch die sukzessive kohärente Anregung höherer Moden erfolgen und sich als Summe aller angeregten Moden eine axiale Mode mit zunehmender Breite bei der Pumpfrequenz ω_0 einstellen. Mit wachsender Breite nimmt die Beugung, der diese Mode unterliegt ab, d.h. man nähert sich in einer Resonatorgeometrie mit hoher Fresnel-Zahl $\mathcal{F}_r \gg 1$ dem in Kapitel 4 betrachteten Fall, bis schließlich eine dort beschriebene Modulationsinstabilität auftritt (Fall (2)). Man beachte, daß in dieser Darstellung die axiale Mode in Kap. 4 ein kollektives Phänomen darstellt.

5.2 Resonator mit hoher Beugung

Nun betrachten wir das Verhalten eines PKR in einer Geometrie mit hoher Beugung ($\mathcal{F}_r = 2$). Im hier studierten Beispiel ist F_0 eine ebene Welle und B_0 Gauss'sch, mit Breite w_0 und auf den PKS fokussiert. Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf den Fall eines fokussierenden Mediums.

Die Resonatorschwelle wurde bei $I_p(0) \simeq 1.15$ gefunden, an der eine um $x = 0$ symmetrische Mode bei der Frequenz der Pumpstrahlen auftrat. Diese Mode blieb stabil bis $I_p(0) \simeq 8.3$, wo eine asymmetrische Mode, wieder bei der Frequenz ω_0 , auftrat. Diese Mode wurde dann bei $I_p(0) \simeq 8.9$ instabil. Das anschließende intermittenzartige Verhalten des Resonatorfeldes E_b ist in Fig. 5.3 bei der Pumpintensität $I_p(0) = 9.0$ anhand seiner Amplitude und seines Fourier-Spektrums illustriert. Bereiche, in denen das Resonatorfeld der Mode knapp unterhalb der Schwelle zur dynamischen Instabilität in hohem Maße gleicht, wechseln mit Domänen komplexen Verhaltens ab. Die Längen der einzelnen

Phasen schwankt von weniger als 20τ zu mehr als 50τ und abwechselnd treten beide Symmetrieverhalten der asymmetrischen statischen Mode auf. Insgesamt wurde dieses Verhalten über einen Zeitraum von ungefähr 2000τ numerisch verfolgt; der in Fig. 5.3 hieraus gezeigte Ausschnitt ist so gewählt, daß in der Aufsicht bei $t = 0$ eine nahezu perfekte Kopie der statischen Mode zu sehen ist.

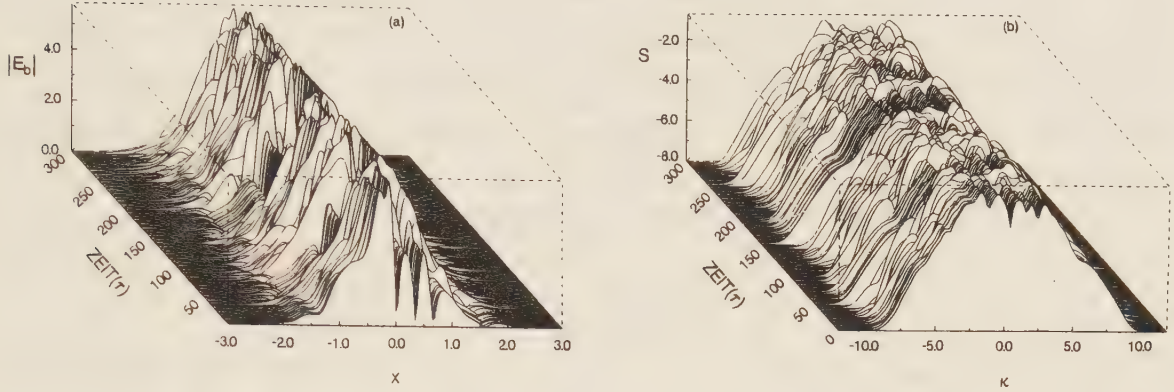


Fig. 5.3: Intermittenz-artiges Verhalten in einer Geometrie mit hoher Beugung ($\mathcal{F}_r = 2$) und einem fokussierenden Medium ($n_2 > 0$) bei $I_p(0) = 9.0$, $F_0 = I_p(0)^{1/2}$, $B_0(x) = I_p(0)^{1/2} \exp(-x^2)$. (a) zeigt die Amplitude $|E_b(x)|$ und (b) das räumliche Fourier-Spektrum $S(\kappa)$ von $E_b(x)$; hierbei ist $S(\kappa) = \log_{10}(|\text{FT}(E_b)|(\kappa)|^2)$. κ ist auf $\kappa_n = \pi \mathcal{F}_r$ und alle Feldamplituden sind auf $I_p(0)^{1/2}$ skaliert.

Der PKR wies eine Hysterese auf, wenn die Pumpintensität von diesem Wert reduziert wurde: Bei $I_p(0) \simeq 8.9$ trat ein neue periodische asymmetrische Mode auf (Periode $\simeq 8\tau$ bei $I_p(0) = 8.5$). Verringerte man die Pumpintensität weiter, dann ging diese Mode bei $I_p(0) \simeq 8.3$ in einen anderen periodischen Modentyp über (Periode $\simeq 10\tau$ bei $I_p(0) = 7.5$). Schließlich fand sich unterhalb $I_p \simeq 7.0$ die ursprüngliche Mode bei der Pumpfrequenz ω_0 wieder.

Typische transversale Strukturen der Resonatorfelder bei der Pumpfrequenz sind in Fig. 5.4 und in der Aufsicht auf Fig. 5.3a zu finden. Die Fig. 5.4a und 5.4b zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$ für $I_p(0) = 2.3$ und 7.7 . Die korrespondierende Amplitude $|E_f(x)|$ ist in den Fig. 5.4c und 5.4d gezeichnet. $|E_b(x)|$ und $|E_f(x)|$ unterscheiden sich stark, was starke transversale Kopplung infolge der Propagation im Resonator anzeigt. Die Nullstellen von $|E_b|$ in Fig. 5.4b korrespondieren zur Nullstelle der Besselfunktion $J_1(2|\Phi_+|)$ bei $|\Phi_+| \simeq 1.9$ und weisen auf eine starke Nichtlinearität hin.

Wie im Falle schwacher Beugung erwiesen sich PKR'n mit defokussierenden Medien gegenüber solchen mit fokussierenden Medien als stabiler. Im Falle eines defokussierenden Mediums wurde die Mode bei der Pumpfrequenz erst bei $I_p \simeq 12$ instabil, ohne vorher ihre Symmetrie um $x = 0$ zu verlieren.

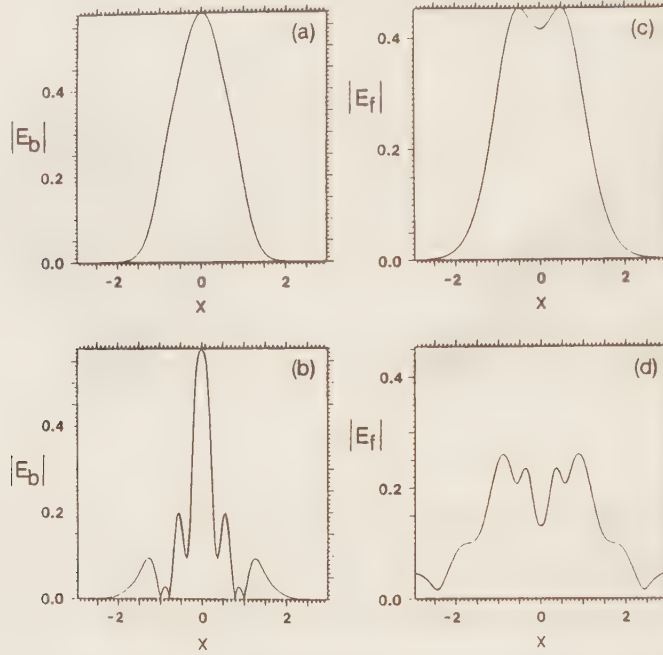


Fig. 5.4: Resonatorfelder bei der Pumpfrequenz ω_0 in einer Geometrie mit hoher Beugung ($\mathcal{F}_r = 2$) und einem fokussierenden Medium ($n_2 > 0$). (a) und (b) zeigen die Amplitude $|E_b(x)|$ bei $I_p(0) = 2.3$ und 7.7 , $F_0 = I_p(0)^{1/2}$, $B_0(x) = I_p(0)^{1/2} \exp(-x^2)$; (c) und (d) zeigen die jeweils korrespondierenden Amplituden $|E_f(x)|$. Die vertikalen Achsen sind auf $I_p(0)^{1/2}$ skaliert.

6. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: INSTANTANES MEDIUM

Wir studieren jetzt die Dynamik des PKR im Grenzfall eines instantan reagierenden Mediums ($\tau = 0$). Zunächst wird die untersuchte Situation in Kap. 6.1 präzisiert. Kap. 6.2 analysiert dann eine in den Simulationen gefundene Unbestimmtheit in der Phase des Feldes im Resonator. In den beiden folgenden Kapn. 6.3 und 6.4 wird das Verhalten eines PKR mit fokussierendem Medium in Abhängigkeit von der Pumpstärke und der Öffnung der Blende am konventionellen Spiegel dargestellt. Der letzte Abschnitt 6.5 versucht schließlich die erhaltenen Ergebnisse qualitativ zu erklären und vergleicht sie mit weiteren untersuchten Fällen.

6.1. Modellbeschreibung

Technisch realisiert man einen PKR mit instantan reagierendem Medium, indem man die Zeitableitungen in den Gln. (3.29) und (3.30) wegläßt. Diese Bedingung ist in der Praxis näherungsweise realisiert, falls die Resonatorumlaufzeit viel länger als die Reaktionszeit des Mediums ist und keine Instabilitäten auf einer gegen die Resonatorumlaufzeit kurzen Zeitskala auftreten. Setzt man nun eine Kombination der Gln. (3.29) - (3.32) in Gl. (3.33) ein, dann erhält man

$$E_f(x, t+1) = M[E_f(t)](x) , \quad (6.1)$$

wobei M eine nichtlineare Funktion im Raum der Resonatorfelder E_f , und die Zeit auf t_c normiert ist. Jede Lösung $E_f(t)$ von Gl. (6.1) ($t \geq 0$) setzt sich aus einem Satz unendlicher Reihen $(E_{f,n})_{t_0} = E_f(t_0+n)$, $t_0 \in [0,1[$ und $n \in \mathbb{N}_0$, zusammen, wobei jede Reihe der Gleichung genügt, die man aus (6.1) erhält, wenn man $t = n$ setzt und die wir von jetzt ab als diskrete Abbildung (6.1) bezeichnen. Die PKR-Dynamik studiert man mittels numerischer Iteration dieser Abbildung. Die so gewonnenen Lösungen $(E_{f,n})$ lassen sich dann zu Lösungen der vollen Gl. (6.1) zusammensetzen.

Konkret studieren wir im folgenden PKR'n mit der Fresnelzahl $\mathcal{F}_r = 2$, einem gekrümmten konventionellen Spiegel mit dem Verhältnis Resonatorlänge zu Krümmungsradius $L/R = 0.9$ und 1 , und auf den PKS fokussierten Gauss'schen Pumpstrahlen gleicher Intensität und der Breite 1 . In diesen Konfigurationen hat man

erstens einen hohen Rückkopplungsgrad des vom PKS in den Resonator gestreuten Feldes E_f auf die Zone hoher Pumpintensität im PKS, und zweitens kann die Stärke der transversalen Kopplung (Beugung) der Felder beim Umlauf im Resonator durch Veränderung der Breite der Apertur vor dem konventionellen Spiegel in einem besonders weiten Bereich verändert werden. Beides läßt sich an einem PKR mit konfokaler Geometrie ($L/R = 1$) besonders leicht sehen: In diesem Fall reduziert sich bei voll geöffneter Blende ($u = \infty$) die Resonatorpropagation (3.33) zu $E_f(x, t+1) \propto E_b(-x, t)$. Gute Rückkopplung ist evident und die transversale Kopplung wird vom normalen Spiegel (nach zwei Resonatorumläufen) vollständig kompensiert. Durch Verkleinern der Aperturbreite u läßt sich die Stärke der transversalen Kopplung kontinuierlich von null erhöhen.

6.2. Phasenunbestimmtheit

In den Simulationen fand man eine wesentlich vereinfachte Dynamik des PKR, wenn man die absolute Phase des Resonatorfeldes $E_{f,n}$ nicht aufnahm, d.h. z.B.

$$E'_{f,n}(x) = E_{f,n}(x) \exp(-i\phi_{f,n}(0)) \quad (6.2)$$

statt $E_{f,n}(x)$ registrierte: Bei jeder geradzahlig periodischen oder chaotischen Folge ($E'_{f,n}$) bedeckten die einem festen Zustand E'_f der Folge korrespondierenden Phasen $\phi_{f,n}(0)$ das volle 2π -Intervall. Dies ist am Beispiel einer Periode-8 Lösung von $E'_{f,n}$ in Fig. 6.1 gezeigt. Während die Phasenraumtrajektorie von $E'_{f,n}(0)$ nur aus 8 Punkten auf der reellen Achse bestehen würde, setzt sich die von $E_{f,n}(0)$ aus 8 konzentrischen Kreisen zusammen, zwischen denen das System zu jeweils zufällig ausgewählt erscheinenden Phasenwerten springt.

Dieses Verhalten läßt sich allein aus folgender Eigenschaft der nichtlinearen Funktion M in Gl. (6.1) erklären:

$$M[E_f e^{i\delta}] = e^{-i\delta} M[E_f] , \quad (6.3)$$

wobei $\delta \in \mathbb{R}$ und das entscheidende Minuszeichen von der Phasen- (Komplex) Konjugationsoperation in M herrührt. Die Phasenunbestimmtheit tritt außer in dem in dieser Arbeit betrachteten PKR in allen PKR'n auf, die Bed. (6.3) erfüllen.

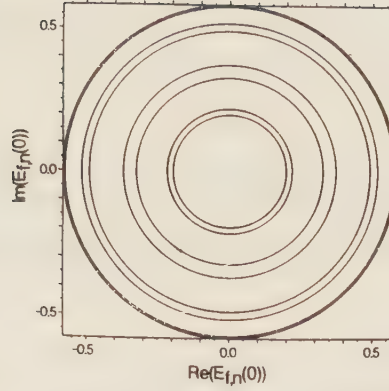


Fig. 6.1: Phasenraumtrajektorie von $E_{f,n}(0)$ im Fall eines fokussierenden Mediums, $u = 1$, $L/R = 0.9$ und $I_p(0) = 3.12$. Die Feldamplitude ist auf $I_p(0)^{1/2}$ normalisiert.

Aus einer Kombination der Gln. (6.1) - (6.3) erhält man sofort

$$E_{f,n+1}'(x) e^{i\phi_{f,n+1}(0)} = e^{-i\phi_{f,n}(0)} M[E_{f,n}'](x) . \quad (6.4)$$

Mit der Phase Ω_n von $M[E_{f,n}'](0)$,

$$\Omega_n = \text{mod} 2\pi(-i \ln \left[\frac{M[E_{f,n}'](0)}{|M[E_{f,n}'](0)|} \right]) , \quad (6.5)$$

wobei $\ln$ den komplexen natürlichen Logarithmus bezeichnet, erhält man aus Gl. (6.4) die diskrete Abbildung

$$\phi_{f,n+1}(0) = \text{mod} 2\pi(\Omega_n - \phi_{f,n}(0)) . \quad (6.6)$$

Diese Beziehung wurde zuerst in einem Ebene-Wellen-Modell des PKR gefunden [72].

Wir betrachten jetzt den Fall einer r -periodischen Lösung ($E_{f,n}$) der diskreten Abb. (6.1). Nach mr -Resonatorumläufen (Iterationen von Gl. (6.6)) erhält man unter Beachtung von $\Omega_{n+r} = \Omega_n$ die Phase

$$\phi_{f,mr}(0) = \text{mod} 2\pi \left(\left[\sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu r} \right] \left[\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \Omega_{r-j} \right] + (-1)^{mr} \phi_{f,0}(0) \right). \quad (6.7)$$

Sie verhält sich bei gerad- und ungeradzahliger Periode r vollständig verschieden.

(1) r *ungeradzahlig*: In diesem Fall verschwindet die erste Summe in Gl. (6.7), falls $m = 2q$, und es bleibt

$$\phi_{f,2qr}(0) = \text{mod} 2\pi (\phi_{f,0}(0)) . \quad (6.8)$$

Tatsächlich findet man in den Simulationen bei ungeradzahlig r -periodischem Feld $E'_{f,n}$ eine Periode $2r$ in der Phase $\phi_{f,n}(0)$. Im Fall $r = 1$ bedeutet dies, daß selbst die stationäre Lösung E_f eine Periode 2 in der Phase aufweist. Dieses Resultat ist in der Phasenkonjugation wohlbekannt [24]: Die Phase des Feldes im Resonator benötigt zwei Resonatorumläufe, um den ursprünglichen Wert wieder einzunehmen.

(2) r *geradzahlig*: In diesem Fall reduziert sich Gl. (6.7) zu

$$\phi_{f,mr}(0) = \text{mod} 2\pi \left(m \left[\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \Omega_{r-j} \right] + \phi_{f,0}(0) \right). \quad (6.9)$$

Außer im nicht generischen Fall

$$\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \Omega_{r-j} = \frac{2p\pi}{m} , \quad (6.10)$$

$p \in \mathbb{Z}$, weist die Phase $\phi_{f,n}(0)$ quasiperiodisches Verhalten auf, das zu den Kreisen in Fig. 6.1 führt. Eine Periodenverdopplung des Feldes $E'_{f,n}$ im Resonator ist i.a. also hinreichend, um eine vollständige Unbestimmtheit der Phase hervorzurufen. Man beachte jedoch, daß die Dynamik der Phase $\phi_{f,n}(0)$ nicht chaotisch ist, da die Abb. (6.6) den Abstand erhält. Es sei noch erwähnt, daß im Falle einer chaotischen Folge ($E'_{f,n}$) in einer Darstellung wie in Fig. 6.1 statt Kreisen Annulli zu sehen sind.

Am Schluß sei noch bemerkt, daß alle Lösungen ($E_{f,n}$) der diskreten Abb. (6.1) eine marginale Phaseninstabilität bei den Frequenzen $\omega_0 \pm \pi$ halbaxialer Moden aufweisen: Ist

$(E_{f,n})$ eine Lösung jener Gleichung und δ eine beliebige reelle Zahl, dann ist $(E_{f,n} \exp(i(-1)^n \delta))$ ebenfalls eine Lösung.

6.3. Fokussierendes Medium und kleine Apertur

6.3.1. Periodenverdopplungs-Szenario

Zunächst studieren wir die Dynamik eines PKR mit Apertur $u = 1$ und Spiegelgeometrie $L/R = .9$, indem wir die Pumpintensität $I_p(0)$ nach jedem Resonatorumlauf (Iteration der diskreten Abb. (6.1)) um einen konstanten Wert ΔI_p erhöhen bzw. erniedrigen und die totale Intensität I_f des Feldes E_f , die durch

$$I_f = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |E_f(x)|^2 \quad (6.11)$$

definiert ist, gegen $I_p(0)$ auftragen.

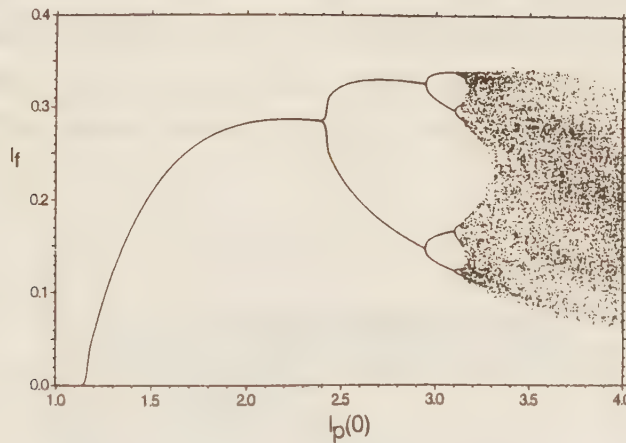


Fig. 6.2: Intensität I_f im Resonator als Funktion der Pumpintensität $I_p(0)$ für $\Delta I_p = 10^{-4}$. Ein Periodenverdopplungs-Szenario ins Chaos ist erkennbar. I_f ist auf $I_p(0)$ skaliert.

In Fig. 6.2 ($\Delta I_p = 10^{-4}$) sieht man ein Periodenverdopplungsszenario, das ins Chaos führt und numerisch bis zur Periode 256 (P256) verfolgt wurde. Das Vorliegen hoher Bifurkationsordnungen ist ein starkes Indiz dafür, daß tatsächlich eine vollständiges

Feigenbaum-Szenario vorliegt [44]. Die Pumpintensitäten $I_p(0,m)$, an denen $P2^{m-1}$ - in $P2^m$ -Lösungen bifurkieren, skalieren innerhalb der berechneten Genauigkeit von 5% erwartungsgemäß nach dem Gesetz in Gl. (2.4), mit der Feigenbaum-Konstanten δ_{FB} als Skalierungskonstanten.

Der Bereich $3.1 \leq I_p(0) \leq 3.5$ aus Fig. 6.2 ist in Fig. 6.3 besser aufgelöst ($\Delta I_p = 10^{-5}$) und weist in dieser Auflösung keine numerische Hysterese bei abwechselnder Erhöhung/Erniedrigung von $I_p(0)$ auf. Wie in Kapitel 2.2.1. angedeutet, finden wir im chaotischen Bereich ($I_p > I_p(0,\infty)$) deutliche Abweichungen vom Feigenbaum-Szenario der eindimensionalen logistischen Parabel, welches in Fig. 2.2 dargestellt ist. Zunächst betrachten wir Abweichungen auf phänomenologischer Ebene:

(1) Die zwei/vier Blätter des chaotischen P2-/P4-Attraktors vereinigen sich vorzeitig zu einem/zwei Blatt (siehe Fig. (6.3)). Das periodische P6-Fenster bei $I_p(0) \simeq 3.30$ läge andernfalls augenscheinlich im Bereich des zweiblättrigen chaotischen Attraktors.

(2) Das P3-Fenster in Fig. 2.2, welches das breiteste überhaupt ist, findet sich beim PKR nicht (zumindest nicht im Bereich $I_p(0) < 7.0$), während dem P5-Fenster ein Fenster bei $I_p(0) \simeq 3.445$ korrespondiert. Die beiden Äste im Bereich des P2-Chaos in Fig. 2.2 lassen sich zum Vergleich mit Fig. 6.3 wegen schlechter Auflösung nicht heranziehen. Stattdessen kann wieder der besser aufgelöste Bereich des P1-Chaos verwendet werden, der jenen Ästen bis auf Skalierungskonstanten im wesentlichen gleicht. In Fig. 6.3 finden sich dann dem P6- und P10-Fenster in Fig. 2.2 korrespondierende Fenster bei $I_p \simeq 3.30$ bzw. $I_p \simeq 3.20$. Abweichend von Fig. 2.2 tritt aber zwischen diesen zusätzlich ein P14-Fenster bei $I_p \simeq 3.225$ auf, das im PKR-System zudem das breiteste Fenster überhaupt ist.

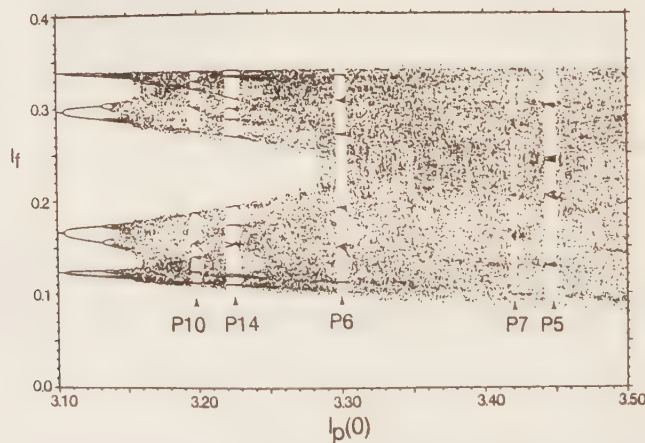


Fig. 6.3: Ausschnitt aus Fig. 6.3 in höherer Auflösung $\Delta I_p = 10^{-5}$.

(3) In vergrößerter Auflösung ($\Delta I_p = 2 \cdot 10^{-7}$) findet man im P14-Fenster die in Fig. 6.4 dargestellte Hysterese.

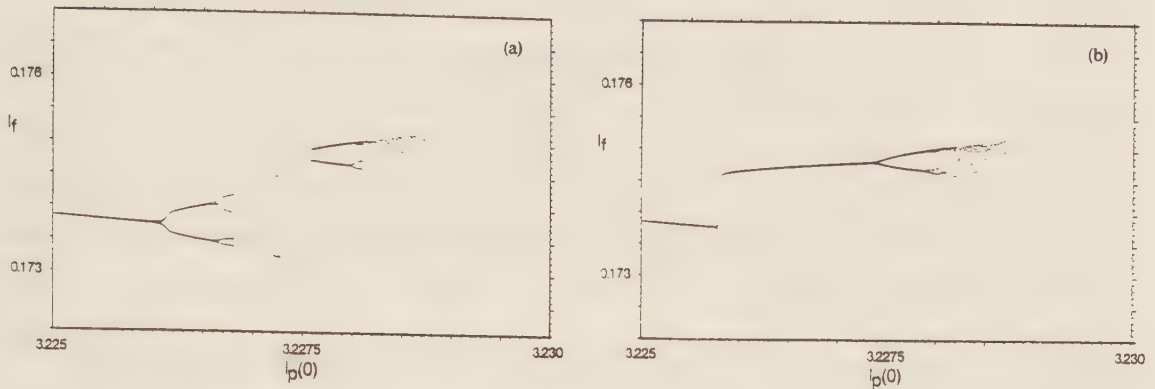


Fig. 6.4: (a) Ein Ast des P14-Fensters aus Fig. 6.3, wenn die Pumpintensität erhöht wird ($\Delta I_p = +2 \cdot 10^{-7}$); (b) derselbe Ast, wenn die Pumpintensität erniedrigt wird ($\Delta I_p = -2 \cdot 10^{-7}$).

(4) Das P5-Fenster in Fig. 6.3 bei $I_p(0) \simeq 3.445$ ist nicht stabil und verschwindet im Wechsel mit chaotischen Phasen immer wieder: In Fig. 6.5 ist bei fester Pumpintensität $I_p(0) = 3.442$ die Umgebung $.195 \leq I_f \leq .215$ einer der fünf Bifurkationsbäume aus Fig. 6.3 gegen die Anzahl der Iterationen (Zeit) aufgetragen. Wie in Fig. 2.3 liegt offenkundig intermittentes Verhalten vor. In Fig. 6.6 wurde das Fenster an 42 äquidistanten $I_p(0)$ -Werten rekonstruiert. Hierzu wurde die diskrete Abb. (6.1) jeweils solange iteriert, bis 200 aufeinanderfolgende I_f -Werte der fünften Iterierten dieser Abbildung im Intervall $.199 \leq I_f \leq .210$ lagen; dann wurde der 81. bis 120. Wert dieser Serie aufgezeichnet. Das Ergebnis indiziert die Existenz eines intermittenten Feigenbaum-Szenarios.

(5) Trägt man im Bereich von P2- und P4-Chaos die Intensität I_f gegen die Anzahl der Iterationen (Zeit) auf, dann findet man immer wieder Abschnitte mit periodischem Verhalten. In Fig. 6.7 ist dies am unteren Ast des P2-Attraktors bei $I_p(0) = 3.18$ dargestellt, wo mehrfach ein P22-Orbit zu sehen ist. Eine systematische Untersuchung dieses Phänomens im Limit $I_p(0) \rightarrow I_p(0, \infty)$ ließ die benötigte Rechenzeit leider nicht zu. Eine Stichprobe im Bereich von P32-Chaos wies zumindest nach $5 \cdot 10^4$ Iterationen noch keine periodischen Phasen auf.

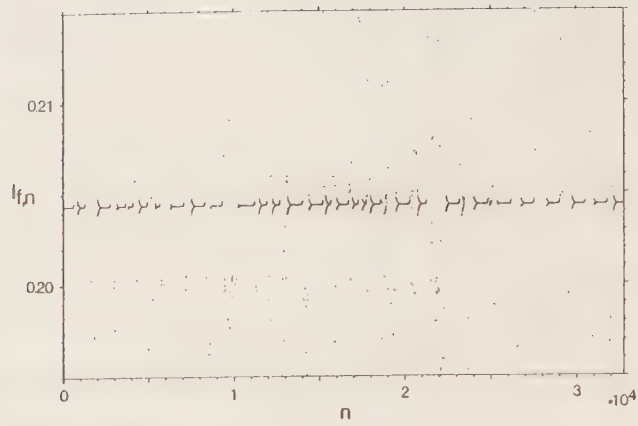


Fig. 6.5: $I_{f,n}$ ist im Bereich $.195 \leq I_{f,5n} \leq .215$ für $I_p(0) = 3.442$ gegen n aufgetragen.

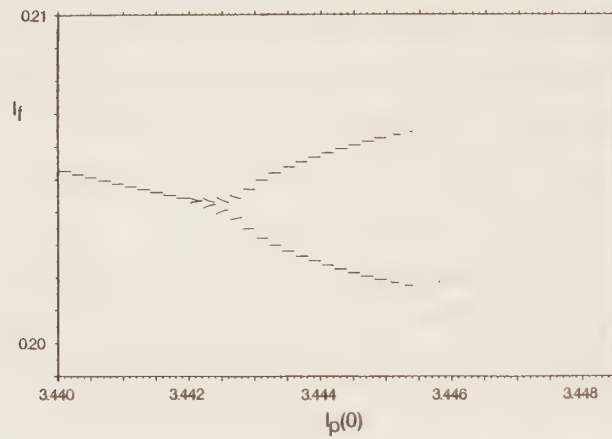


Fig. 6.6: Rekonstruktion eines Astes des intermittenten P5-Fensters aus Fig. 6.3.

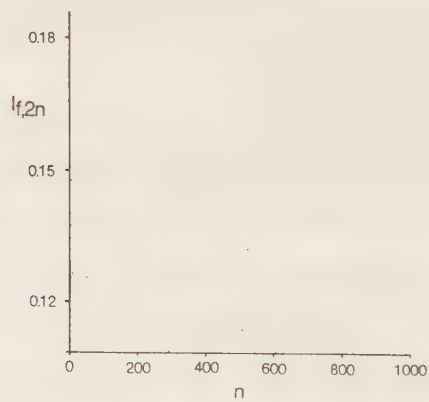


Fig. 6.7: $I_{f,2n}$ ist auf dem unteren Ast des chaotischen P2-Attraktors bei $I_p(0) = 3.18$ gegen n aufgetragen.

Das unter (2) und (5) im Bereich des P2- und P4-Chaos beschriebene Verhalten erscheint im Rahmen von Spekulationen, die auf einem Theorem von Newhouse basieren [73], interessant: Danach wären in zweidimensionalen diskreten Abbildungen gewisse (oder alle) chaotische Attraktoren von nahen stabilen periodischen Attraktoren umgeben. Dies weist auf eine gegenüber eindimensionalen Abbildungen wesentlich reichhaltigere Struktur im Phasenraum zweidimensionaler Abbildungen hin, die man auch in höherdimensionalen Systemen wie dem PKR erwartet. Abhängig von der Attraktivität und dem Attraktionsbassin solcher stabiler periodischer Orbits sind zusätzliche periodische Fenster (P14-Fenster) bzw. periodische Phasen in ansonsten chaotischen Lösungen denkbar.

Ein eindeutiger Beweis für ein der I_f -Dynamik in Fig. 6.3 zugrundeliegender höherdimensionaler Phasenraum liegt vor, wenn die Dimension zumindest eines zugehörigen Attraktors den Wert eins übersteigt. Dies wurde exemplarisch für den Attraktor bei $I_p(0) = 3.18$ durch Bestimmung der unteren Schranke D_2 der Informationsdimension D_1 nachgewiesen. O.B.d.A. haben wir hierzu nur den Teil A_2 des Attraktors, der den I_f -Werten auf dem unteren Ast in Fig. 6.3 korrespondiert, herangezogen. Zunächst stellen wir fest, daß jeder Zustand $E_{f,n}$ des PKR und somit A_2 in einem unendlichdimensionalen Phasenraum S lebt. Wir folgten daher der in Kap. 2.4 beschriebenen Prozedur und betteten A_2 in euklidische Räume $R^{m'}$ wachsender Dimension m' ein. A_2 wurde in $R^{m'}$ eingebettet, indem die Folge $(E_{f,2n})$ in S auf die Folge

$$(\mathbf{x}_n) = (I_{f,2n}, I_{f,2n+2}, \dots, I_{f,2n+2m'-2}) \quad (6.12)$$

in $R^{m'}$ abgebildet wurde. Man beachte, daß bei dieser Einbettung von A_2 , die sich allein aus der $(I_{f,n})$ -Folge gewinnen läßt, eine Extradimension, die von der im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Phaseninstabilität herrührt, verlorenght.

In der praktischen Durchführung haben wir die diskrete Abb. (6.1) zunächst 10^4 mal iteriert, um sicher "auf" dem Attraktor zu sein (längere Iterationen führten zu unveränderten Ergebnissen), und dann die nächsten 2000 $I_{f,2n}$ -Werte zur Einbettung in $m' = 2, 4, \dots, 14$ -dimensionale Räume $R^{m'}$ verwendet. Dann wurde $\ln(C(\epsilon))$ nach Def. (2.11) für alle Einbettungen berechnet und in Fig. 6.8 gegen $\ln(\epsilon)$ aufgetragen. Für jede Einbettung ist D_2 gerade gleich der Steigung des linearen Teils der jeweiligen Kurve in Fig. 6.8 (siehe Gl. (2.10) - bei kleinem ϵ weichen die Kurven von der Linearität ab, da in diesem Bereich $C(\epsilon)$ nur aus wenigen Punkten bestimmt wird). Man erhält für die obersten fünf Kurven in Fig. 6.8 $D_2 = 1.357, 1.445, 1.425, 1.449, 1.449$. Ab $m' = 4$

wächst D_2 nicht mehr an und liegt im Bereich

$$D_2 = 1.435 (2.435) \pm .015 \quad . \quad (6.13)$$

Der Wert in Klammern berücksichtigt die Extradimension, die bei der Einbettung verlorengegangen ist. Im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt geben wir den Wert der Lyapunov-Dimension,

$$D_L = 3.00 \pm .02 \quad , \quad (6.14)$$

an, welcher ohne Einbettungsprozedur gewonnen wurde, und daher mit dem Wert in der Klammer in Gl. (6.13) verglichen werden muß. Offensichtlich ist $D_2 < D_L$, d.h. der Attraktor ist uneinheitlich mit Punkten überdeckt (siehe Kap. 2.3.1.).

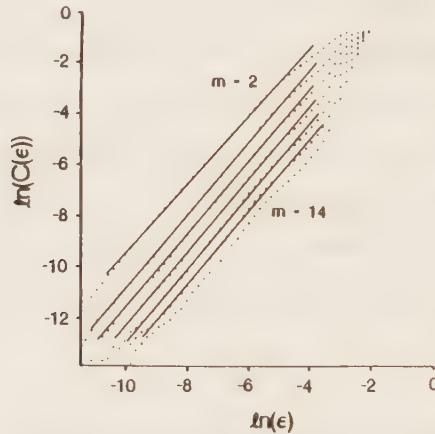


Fig. 6.8: $\ln(C(\epsilon))$ gegen $\ln(\epsilon)$ für $m = 2, 4, \dots, 14$ -dimensionale Einbettungen des Attraktors A_2 ; $D_2 = 1 + 1.435 \pm 0.015$.

Aus Fig. 6.8 läßt sich auch die untere Schranke K_2 der metrischen Entropie K_1 von A_2 bestimmen: Zunächst bezeichnen wir den in R^m eingebetteten Attraktor A_2 mit $A_{2,m}$. Anhand Kap. 2.3.2. läßt sich $K_2(m)$ für die Dynamik auf $A_{2,m}$ aus den Vektoren y_k bestimmen, die man bei k im Zeitabstand $2m$ durchgeführten Messungen einer Trajektorie auf $A_{2,m}$ erhält. Diese Vektoren sind identisch mit den Zuständen x_n einer mk -dimensionalen Einbettung von A_2 . Bezeichnet man die Funktion $C(\epsilon)$ einer m' -dimensionalen Einbettung von A_2 mit $C(\epsilon, m')$, dann ist $K_2(m)$ von $A_{2,m}$ nach Gl. (2.19):

$$K_2(m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \{ \ln[C(\epsilon, mk)] - \ln[C(\epsilon, mk+m)] \} . \quad (6.15)$$

Man beachte, daß der {}-Klammerausdruck in einer Darstellung wie in Fig. 6.8 gerade jeweils der vertikale Abstand zweier Kurven, deren Einbettungsdimension um m differiert, ist. Nach kurzer Rechnung sieht man $K_2(m) = K_2(1)$, d.h. $K_2(m)$ ist unabhängig von m . $K_2(m)$ wird daher mit K_2 von A_2 bzw. des gesamten Attraktors bei $I_p(0) = 3.18$ identifiziert. Fig. 6.9 zeigt, daß eine Einbettung von A_2 in bis zu 14-dimensionale Räume für eine eindeutige Bestimmung von K_2 noch nicht ausreicht. Setzt sich jedoch das bei $k = 5$ einsetzende Plateauverhalten zu größeren k hin fort (dies ist in den in der Literatur beschriebenen Beispielen i.a. der Fall - Ausnahme [37]), dann läßt sich K_2 zu

$$K_2 \simeq .15 \quad (6.16)$$

abschätzen. Zum Vergleich geben wir im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt die obere Schranke H von K_1 (siehe Gl. (2.20)) an:

$$H = .180 \pm .002 . \quad (6.17)$$

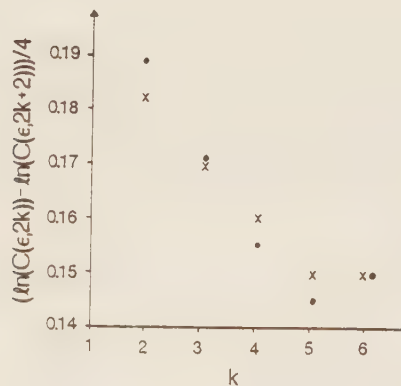


Fig. 6.9: Auswertung von Formel (6.15) am Attraktor A_2 für $m = 2$ im Bereich $k = 2 - 6$. Punkte: $\epsilon \simeq 0.0085$; Kreuze: $\epsilon \simeq 0.0016$.

Niedrigdimensionale Attraktoren in unendlichdimensionalen Phasenräumen lassen sich durch Einbettungen sichtbar machen. In Fig. 6.10a ist A_2 in R^2 eingebettet gezeigt. Die Einbettung (6.11) ist in diesem Fall äquivalent dazu, $I_{f,2n+2}$ gegen $I_{f,2n}$ aufzutragen, was

in einem eindimensionalen System gerade die zweite Iterierte der Funktion f_μ aus Gl. (2.2) liefert. Die parabolische Form von A_2 ist ein Überbleibsel der eindimensionalen, parabolischen Form, die alle hohen Iterierten einer Abb. (2.2) im Limit $\mu \rightarrow \mu_\infty$ annehmen [50] und in Fig. 6.11, die einen Attraktor A_8 bei $I_p(0) = 3.141$ im Bereich von P8-Chaos zeigt, schon beinahe realisiert ist. In den Fig. 6.10b und 6.10c sind die in den Fig. 6.10a bzw. 6.10b markierten Bereiche herausvergrößert. In Folge zeigen die Fig. 6.10a - 6.10c, daß Linien sich unter jeweils höherer Vergrößerung wieder in Linien aufspalten. Allerdings ist bei dem hier erreichten Grad der Auflösung selbstähnliche Skalierung nicht eindeutig identifizierbar. Eine Erhöhung der Auflösung (mittels weiterer Iterationen) verbietet die benötigte Rechenzeit.

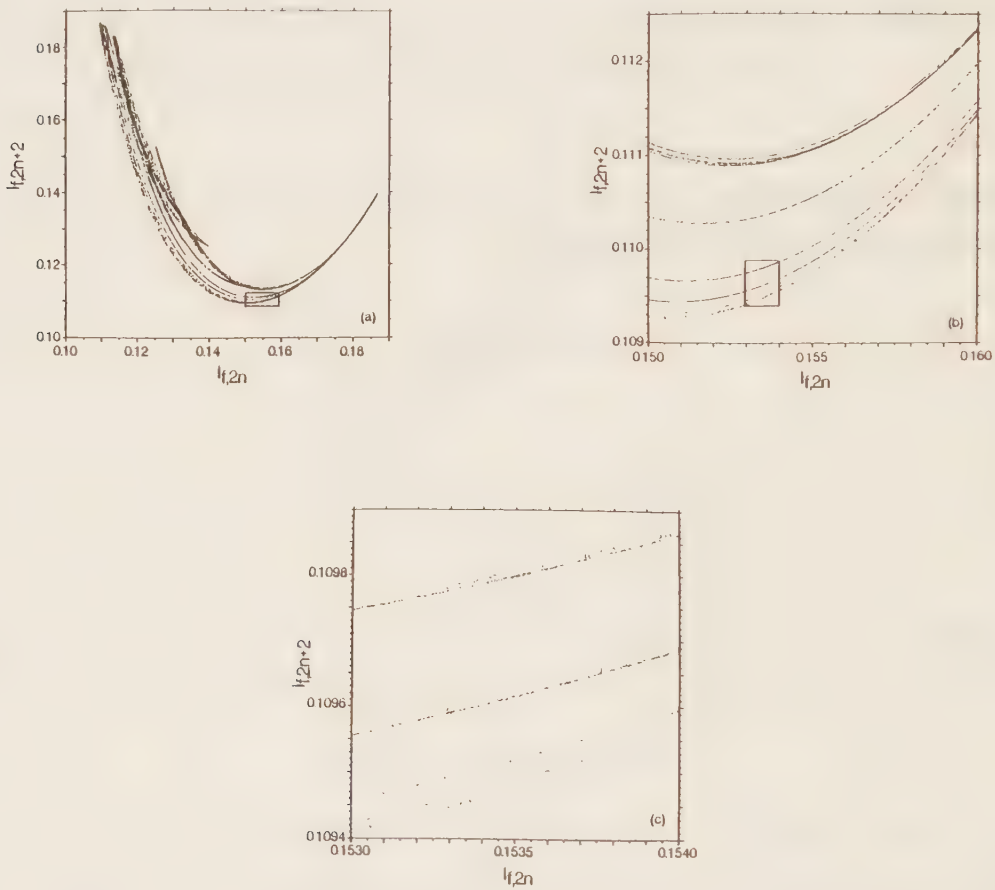


Fig. 6.10: Zweidimensionale Einbettung des chaotischen Attraktors A_2 bei $I_p(0) = 3.18$: (a) zeigt den ganzen Attraktor, (b) und (c) vergrößern jeweils den in (a) bzw. (b) markierten Bereich heraus.

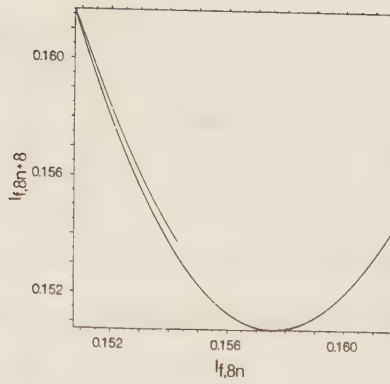


Fig. 6.11: Zweidimensionale Einbettung eines chaotischen A_8 -Attraktors bei $I_p(0) = 3.141$.

Die abstrakte Darstellung eingebetteter Attraktoren gibt wenige Hinweise auf das physikalische Geschehen, das sich hinter dem Attraktor verbirgt. Dies ist in den Fig. 6.12 und 6.13 nachgeholt. In den Fig. 6.12a und 6.13a ist die Amplitude $|E_{b,n}(x)|$ bei den Pumpintensitäten $I_p(0) = 3.1$ und 4.0 nach jedem Umlauf aufgenommen worden. Die Fig. 6.12b und 6.13b zeigen die zugehörigen Phasen $\phi_{b,n}(x) - \phi_{b,n}(0)$. Fig. 6.12 zeigt die in den Fig. 6.2 und 6.3 auch zu sehende P4-Lösung: Der zentrale Teil des Strahl weist eindeutig eine Periode 4 in der Feldamplitude auf, während die Phase beinahe ein P2-Verhalten zeigt und eine "saubere" fokussierende Krümmung hat. In Fig. 6.13 sind 6 aufeinanderfolgende Iterationen einer chaotischen Folge gezeichnet. Die Symmetrie des Feldes um $x = 0$ ist gebrochen und das kompliziert aussehende Verhalten der Feldamplitude kommt in einer Lyapunov-Dimension $D_L \simeq 6$ des zugehörigen Attraktors zum Ausdruck. Wiederum ist die komplizierte Dynamik der Feldamplituden an den Phasen schwerlich zu erkennen.

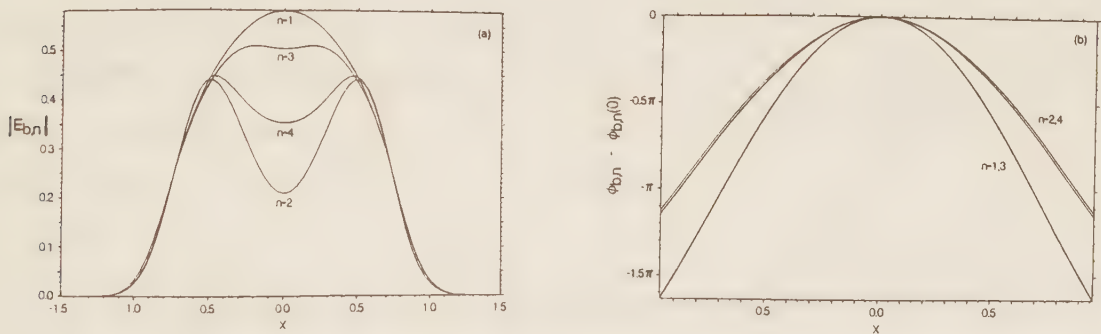


Fig. 6.12: Profile des P4-Resonatorfeldes bei $I_p(0) = 3.1$: (a) Amplitude $|E_{b,n}(x)|$, skaliert auf $I_p(0)^{1/2}$, und (b) Phase $\phi_{b,n}(x) - \phi_{b,n}(0)$ von $E_{b,n}(x)$.

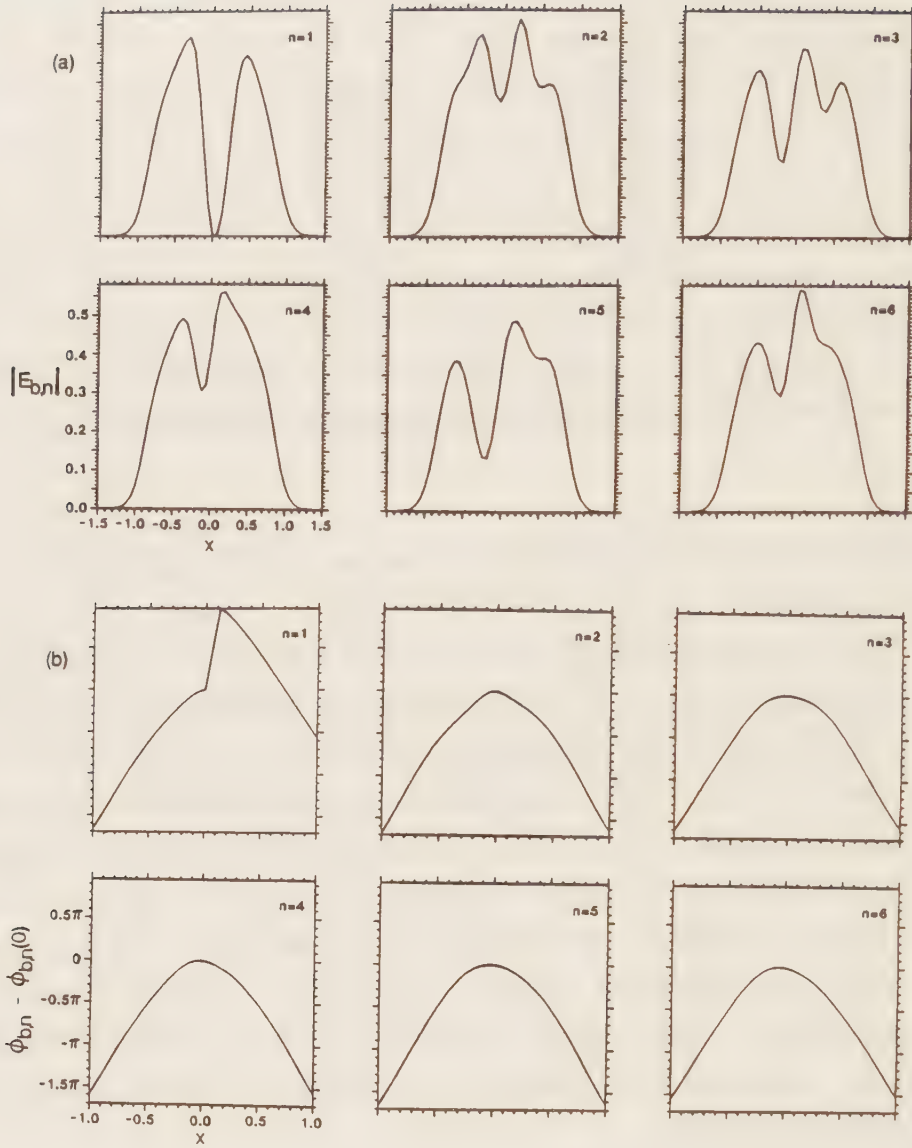


Fig. 6.13: Profile des chaotischen Resonatorfeldes bei $I_p(0) = 4.0$: (a) Amplitude $|E_{b,n}(x)|$, skaliert auf $I_p(0)^{1/2}$, und (b) Phase $\phi_{b,n}(x) - \phi_{b,n}(0)$ von $E_{b,n}(x)$. Die Symmetrie um $x = 0$ ist offensichtlich gebrochen.

6.3.2. Weg zu hochdimensionalen Attraktoren

In diesem Abschnitt studieren wir das Verhalten des PKR bei Erhöhung der Pumpintensität $I_p(0)$ mittels des numerisch leicht zugänglichen Spektrums der Lyapunov-Exponenten (LE) und vergleichen die Resultate mit den von Farmer [34] in der Mackey-

Glass- (M-G)-Differentialgleichung, $dx(t)/dt = -0.1x(t) + 0.2x(t-\tau)/(1 + (x(t-\tau))^{10})$, gefundenen. Sie enthalten einen Verzögerungsterm und haben daher ebenfalls einen unendlichdimensionalen Phasenraum. Numerisch iteriert man die diskrete Abb. (6.1) nach Diskretisierung der transversalen Koordinate in $N = 2^k$ Punkte. Trennt man $E_{f,n}$ in Real- und Imaginärteil, dann kann man dies als Iteration in $\mathbb{R}^{2N}$ auffassen. In dieser reellen Darstellung sind die LE'n durch Gl. (2.3) definiert. Bei deren numerischer Berechnung folgen wir der in Ref. [74] angegebenen Methode, die darauf beruht, daß die Wachstumsrate m -dimensionaler infinitesimaler Volumenelemente gleich der Summe der m größten LE'n ist. Die Berechnung der m größten LE'n erfordert die Iteration der linearisierten, diskreten Abb. (6.1) entlang einer Phasenraumtrajektorie ($E_{f,n}$) für m linear unabhängige Anfangsbedingungen.

Generell wurden konvergente Werte der LE'n λ_i gefunden. Ihr Spektrum war unabhängig von den ausgewählten Trajektorien, wenn sie auf denselben Attraktor führten. Verfeinerung der Auflösung der Simulation durch Verdoppelung der Anzahl der Punkte in der transversalen Koordinate führte zu keiner Veränderung im Spektrum, falls $m \ll 2N$. Hieraus schließen wir auf die Existenz und Diskretheit des Spektrums der LE'n der Attraktoren.

In Fig. 6.14 ist das Spektrum der größten LE'n gegen $I_p(0)$ aufgetragen. Hierbei wurde nach jedem Iterationsschritt die Intensität $I_p(0)$ um einen festen Betrag ΔI_p erhöht, die LE'n aus jeweils 1000 aufeinanderfolgenden Iterationen bestimmt und im Abstand von 500 Iterationen aufgetragen. Das erhaltene Spektrum ist wohldefiniert im Sinne, daß im chaotischen Bereich Halbierung (Viertelung) von ΔI_p und Bestimmung der LE'n aus 2000 (4000) Iterationen die LE'n in Fig. 6.14 zwar nicht punktweise aber doch im Mittel reproduziert bei gleicher lokaler "Rauschamplitude". Die LE'n λ_1 , λ_2 und λ_3 können mit spezifischen Eigenschaften des Systems in Verbindung gebracht werden: $\lambda_1 (= 0)$ rührt von der in Kap. 6.2. besprochenen Phaseninstabilität bei der Frequenz halbaxialer Moden her, λ_2 charakterisiert das effektiv eindimensionale Verhalten bei $I_p(0)$ -Werten in der Umgebung von $I_p(0, \infty)$ und stimmt mit dem LE der eindimensionalen logistischen Parabel im chaotischen Bereich für $I_p(0) < 3.17$ überein, hat jedoch einen kleineren Wert jenseits dieser Pumpintensität, und λ_3 kleiner/größer null begleitet um $x = 0$ symmetrische/asymmetrische ($E_{f,n}$)-Lösungen. Im Bereich hinreichend starken Chaos ($D_L \geq 5$, $I_p \geq 3.7$) wachsen die Mittelwerte aller anderen LE'n als Funktion von $I_p(0)$ stetig, aber mit abnehmender Wachstumsrate an, während die von λ_2 und λ_3 bei $3.7 \leq I_p(0) \leq 5.4$ bzw. $4.5 \leq I_p(0) \leq 5.4$ ein Plateau aufweisen und anschließend wieder ansteigen. Zu beachten ist, daß der größte LE nie den Wert $\ln 2 \simeq .69$ erreicht, den der LE der eindimensionalen logistischen Parabel-Abbildung bei voll entwickeltem Chaos zeigt [45].

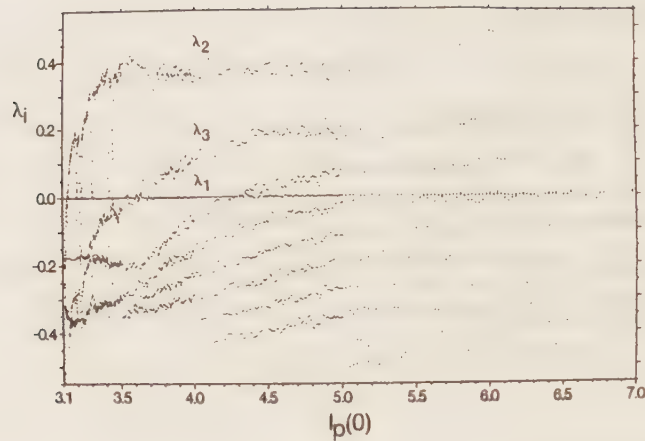


Fig. 6.14: Die größten Lyapunov-Exponenten λ_i als Funktionen von $I_p(0)$.

In Fig. 6.15 ist die Lyapunov-Dimension D_L gegen $I_p(0)$ aufgetragen. Für $I_p(0) < I_p(0, \infty) \simeq 3.14$ ist D_L aufgrund der Unbestimmtheit der Phase von $E_{f,n}$ eins. Bei $I_p(0) = I_p(0, \infty)$ springt sie dann bei einsetzendem chaotischen Verhalten abrupt auf den Wert Zwei. Unter weiterer Erhöhung von $I_p(0)$ wächst D_L an und die meisten Parameterwerte zeigen chaotisches Verhalten. An manchen Stellen treten periodische Orbits auf, die sich in einer scharfen Abnahme von D_L auf den Wert eins äußern. Im Bereich $3.17 \leq I_p(0) \leq 3.23$ weist der Mittelwert von D_L ein Plateau bei $D_L \simeq 3.0$ infolge einer Art Synchronisation von λ_2 und λ_3 auf die Werte $\simeq \pm 0.18$ auf. Jenseits $I_p(0) \simeq 3.5$ weist D_L keine größeren Sprünge mehr auf und ihr Mittelwert ist eine wachsende Funktion von $I_p(0)$, allerdings mit abnehmender Wachstumsrate.

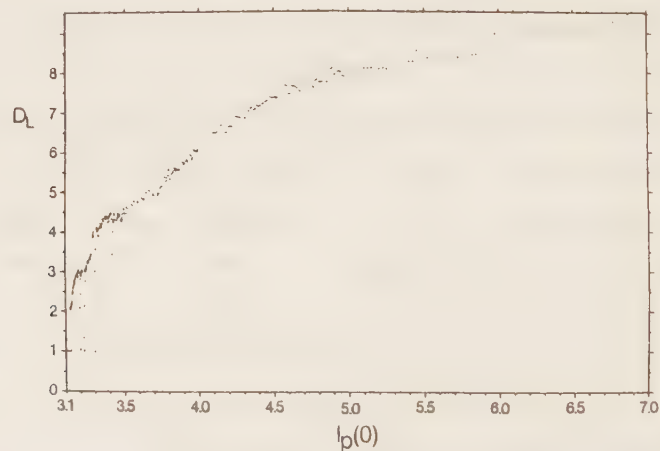


Fig. 6.15: Die Lyapunov-Dimension D_L als Funktion von $I_p(0)$.

In Fig. 6.16 ist die obere Schranke H der metrischen Entropie K_1 gegen $I_p(0)$ aufgetragen (man erinnere sich, daß H und K_1 i.a. übereinstimmen). Im Mittel ist H eine wachsende Funktion von $I_p(0)$. Zu beachten ist, daß H den Wert $\simeq 0.69$, den die logistische Parabel bei voll entwickeltem Chaos aufweist, erst bei $I_p(0) \simeq 5.5$, wo D_L bereits den Wert 8.5 hat, erreicht. Die Chaotizität pro Dimensionseinheit ist daher bei hochdimensionalen chaotischen Attraktoren des PKR klein gegen den eindimensionalen Fall. Zudem weist das in Fig. 6.14 gesehene Verhalten des LE λ_2 darauf hin, daß bei gegebener Nichtlinearität (Pumpintensität) transversale Freiheitsgrade die absolute Chaotizität im Vergleich mit einer eindimensionalen Beschreibung (z.B. einem Ein-Mode-Modell) reduzieren.

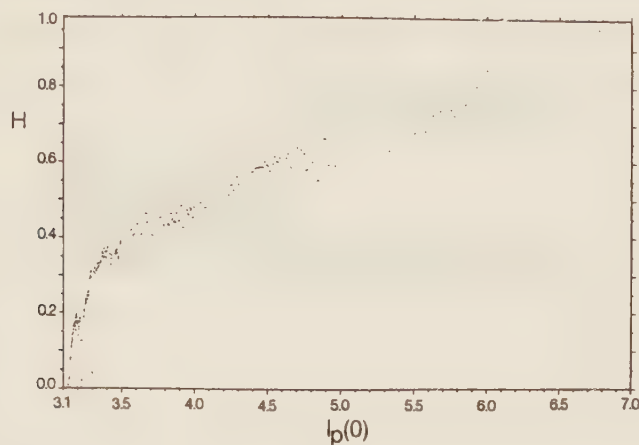


Fig. 6.16: Die metrische Entropie H als Funktion von $I_p(0)$.

Nun können wir das Verhalten der Attraktoren des PKR als Funktion der Pumpintensität mit dem in den M-G-Differentialgleichungen als Funktion der Verzögerungszeit gefundenen [34] vergleichen. Beide Systeme weisen ein Periodenverdopplungsszenario ins Chaos auf. Wir vergleichen nicht den Bereich niedrigdimensionaler Attraktoren mit kompliziert verflochtenen stabilen periodischen und chaotischen Attraktoren, sondern konzentrieren uns auf deren Weg zu hochdimensionalen Attraktoren. Im Bereich $D_L \geq 5$ ($I_p(0) \geq 3.7$) sind in beiden Systemen die Mittelwerte der LE'n und der abgeleiteten Größen D_L und H glatte Funktionen des externen Parameters. Einem linearen Wachstum der Dimension D_L mit dem äußeren Parameter im M-G-System steht eine abnehmende Wachstumsrate beim PKR gegenüber. Während das Maß H für Chaotizität im M-G-System konstant ist, wächst es beim PKR an. Nur beim PKR ist daher das Anwachsen der Attraktordimension mit einem Anwachsen in dessen Chaotizität verbunden. Schließlich konvergieren die LE'n im M-G-System mit

wachsender Verzögerungszeit gegen null, während sie beim PKR mit der Pumpintensität anwachsen, wenn auch mit abnehmender Wachstumsrate.

6.4. Fokussierendes Medium und mittlere/große Apertur

Wir betrachten wieder einen PKR mit der Spiegelgeometrie $L/R = .9$ und konzentrieren uns zunächst auf den Fall einer auf $u = 3$ geöffneten Blende. Drei wesentliche Resultate sollen hier festgehalten werden:

(1) Wie in Fig. 6.17 ausschnittsweise zu sehen ist, findet sich ein vollständiges Periodenverdopplungsszenario ins Chaos (wurde bis Periode 128 numerisch verfolgt).

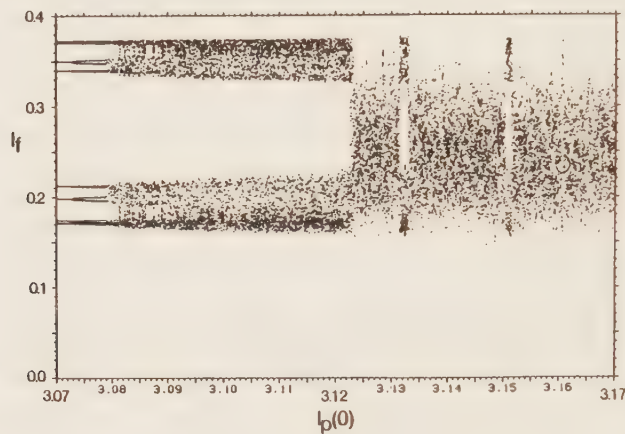


Fig. 6.17: Intensität I_f im Resonator als Funktion der Pumpintensität $I_p(0)$ für $\Delta I_p = 4 \cdot 10^{-6}$. Ein Periodenverdopplungs-Szenario ins Chaos ist erkennbar. I_f ist auf $I_p(0)$ skaliert.

(2) In Zeitserien der Intensität I_f auf chaotischen Attraktoren traten bis nahe dem Akkumulationspunkt der Periodenverdopplungen periodische Phasen auf. Fig. 6.18 zeigt eine solche Zeitserie bei $I_p(0) = 3.07845$. Dies ist der dem Akkumulationspunkt der Periodenverdopplungen nächstgelegene untersuchte Fall und zeigt die Zeitserie auf einem Blatt eines chaotischen P96-Attraktors (in P3-Fenster im Bereich von P32-Chaos). Fig. 6.18 weist auch auf einen verzögerten Einsatz von Chaos in Fig. 6.17 hin (dort findet sich bei $I_p(0) = 3.07845$ noch eine P16-Lösung). Diese Verzögerung verschwindet im Grenzfall $\Delta I_p \rightarrow 0$.

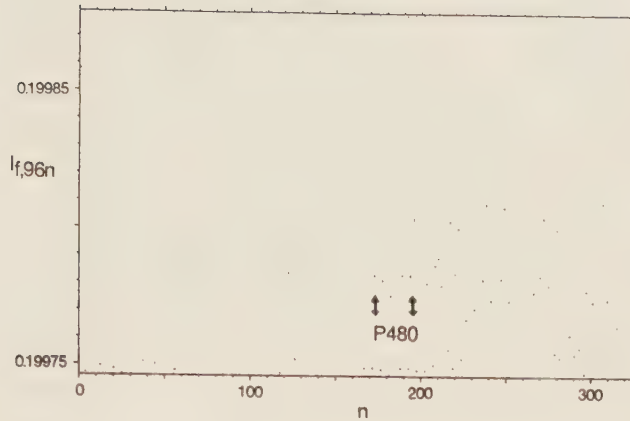


Fig. 6.18: $I_{f,96n}$ ist auf einem Blatt des chaotischen P96-Attraktors bei $I_p(0) = 3.07845$ gegen n aufgetragen. Die beiden am deutlichsten erkennbaren periodischen Abschnitte sind gekennzeichnet.

(3) Der Bereich von P2-Chaos bricht vorzeitig ab und ein hochdimensionaler chaotischer P1-Attraktor erscheint. Man kann dabei drei Regionen der Pumpintensität $I_p(0)$ unterscheiden: (a) Im Bereich $I_p(0) < 3.115$ findet man ausschließlich den (niedrigdimensionalen) P2-Attraktor ($D_L \leq 4.5$). (b) Im Bereich $I_p(0) \geq 3.17$ tritt nur der hochdimensionale P1-Attraktor auf ($D_L \geq 10.5$). (c) Dazwischen pendelt das System bei festgehaltenem $I_p(0)$ zwischen dem P2- und dem P1-Attraktor (der Begriff Attraktor ist hier etwas gedehnt). In Fig. 6.19 ist bei $I_p(0) = 3.13$ eine I_f -Zeitserie aufgenommen, an der sich beide Phasen leicht unterscheiden lassen. Sie konnten jeweils einem Attraktor zugeordnet werden. In jedem einzelnen Zeitabschnitt, in dem P2- bzw. P1-Chaos auftrat, wurde das Spektrum der LE'n aufgenommen und diese Spektren stimmten für alle P2-/P1-Bereiche überein. Konkret wies der P2-Attraktor einen positiven LE und die Dimension $D_L \simeq 4.5$ auf, während der P1-Attraktor fünf positive LE'n und die Dimension $D_L \simeq 10.5$ hatte. Im ersten Fall fanden sich zudem um $x = 0$ symmetrische Felder $E_{f,n}$, während im zweiten Fall diese Symmetrie gebrochen war. Das Vorliegen einer langlebigen Transienten, die schließlich auf einen der beiden Attraktoren führt, ist numerisch nie auszuschließen. Dem steht jedoch entgegen, daß obiges Verhalten auch auftrat, wenn auf dem P2-/P1-Attraktor in Bereich (a)/(b) gestartet und dann $I_p(0)$ langsam über die Grenze $I_p(0) \simeq 3.115/3.17$ erhöht bzw. erniedrigt wurde. Zudem fand sich das Verhalten in Fig. 6.19 selbst nach 10^5 Iterationen. Es stellte sich auch bei weit von den Attraktoren liegenden Anfangsbedingungen unmittelbar ein.

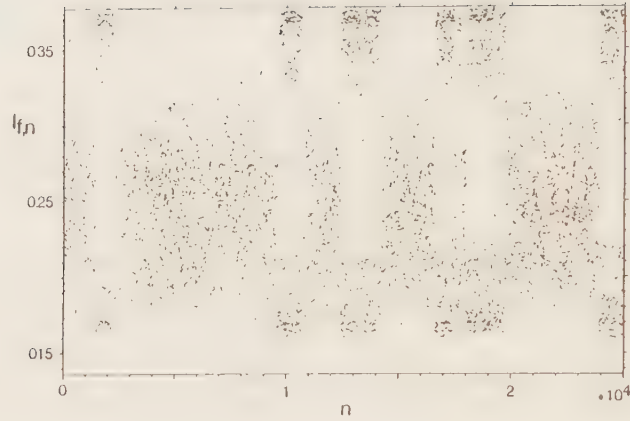


Fig. 6.19: $I_{f,n}$ ist für $I_p(0) = 3.13$ gegen n aufgetragen. Die Phasen mit niedrigdimensionalem P2-Chaos lassen sich aufgrund der Zweiblättrigkeit des korrespondierenden Attraktors leicht von den Phasen mit hochdimensionalem P1-Chaos unterscheiden.

Ein PKR mit weit geöffneter Blende ($u = 8$) zeigt eine abgebrochene Periodenverdopplungssequenz und folgt einem Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario ins Chaos. Erhöht man die Pumpintensität $I_p(0)$, dann tritt zunächst oberhalb der Resonatorschwelle eine stationäre (P1)-Mode auf, die schließlich auf eine P2-Mode bifurkiert. Bei $I_p(0) \simeq 2.77$ erfolgt dann eine Hopf-Bifurkation und eine zweite Periode der Länge $\simeq 74$ erscheint. Ab diesem Punkt sind die einzelnen Stufen auf dem Weg ins Chaos in Fig. 6.20 dargestellt: Bei festgehaltener Pumpintensität $I_p(0)$ wurde jeweils eines der beiden Blätter des P2-Attraktors in R^2 eingebettet, indem $I_{f,2n+2}$ gegen $I_{f,2n}$ aufgetragen wurde. Zusätzlich ist das Fourier-Spektrum $S(f')$ der zugehörigen I_f -Zeitreihe gezeigt, das für eine Serie der Länge N anhand

$$S(f') = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{f,n} e^{i2\pi f' n} \right|^2 \quad (6.18)$$

berechnet wurde. $S(f')$ ist eine periodische Funktion der Frequenz f' mit Periode eins. Setzt man

$$I_{f,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} df'' J_f(f'') e^{-i2\pi f'' n} \quad (6.19)$$

in Gl. (6.18) ein, dann erhält man im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ sofort

$$S(f') = \left| \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_f(f'+k) \right|^2, \quad (6.20)$$

$k \in \mathbb{Z}$. $S(f')$ summiert also über die spektralen Beiträge unendlich vieler Frequenzen auf. Aufgrund der Reellität von I_f ist zudem $J_f(f'') = J_f(-f'')^*$. Der in Fig. 6.20 gezeigte Ausschnitt von $S(f')$ auf dem Frequenzintervall $[0, 0.5]$ repräsentiert daher das ganze Spektrum. Die bemerkenswerte Symmetrie der Spektren in Fig. 6.20 um $f' = 1/4$ erklärt sich wie folgt: Enthält die Folge $(E_{f,n})$ die Frequenz $f_1' = 1/2$ halbaxialer Moden und eine zweite Frequenz f_2' , d.h. $E_{f,n} = e_0 + e_1 \exp(-i\pi n) + e_2 \exp(-i2\pi f_2' n)$, dann finden sich im Spektrum $S(f')$ der Intensität $(I_{f,n})$ die Frequenzen $0, \pm 1/2, \pm f_2'$ und $\pm(1/2 - f_2')$. Die Frequenzen $\pm f_2'$ und $\pm(1/2 - f_2')$ liegen aber gerade symmetrisch um $f' = 1/4$.

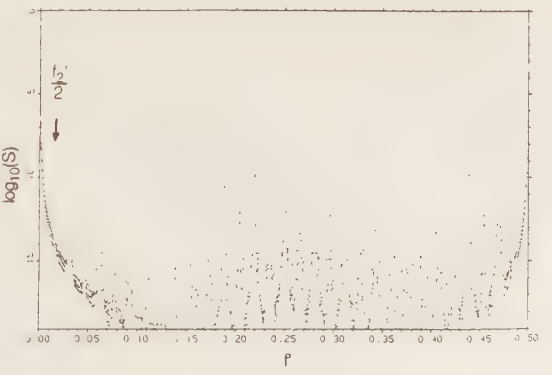
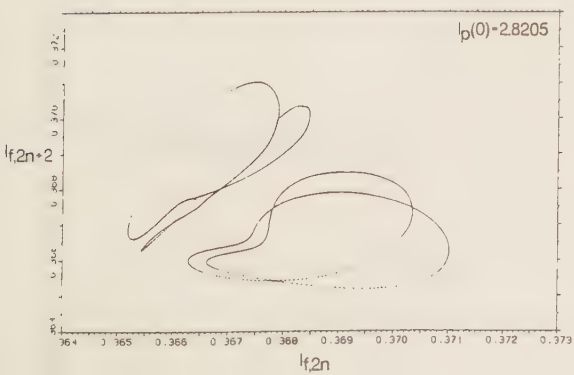
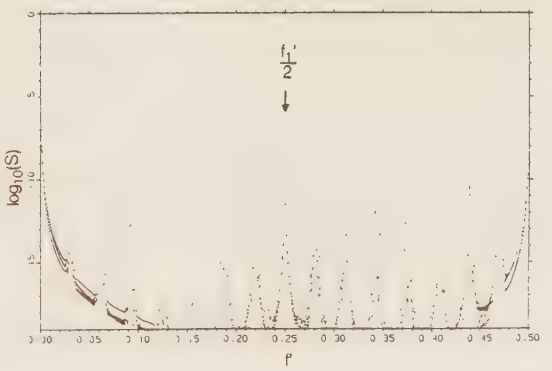
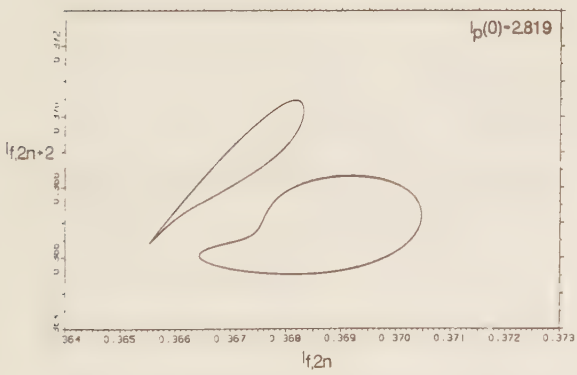
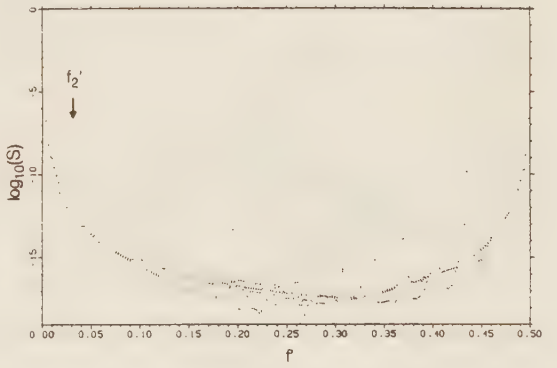
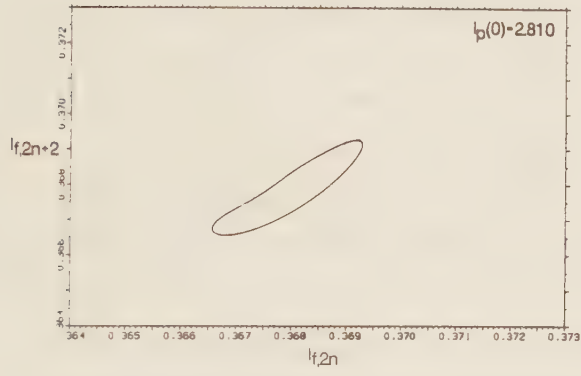
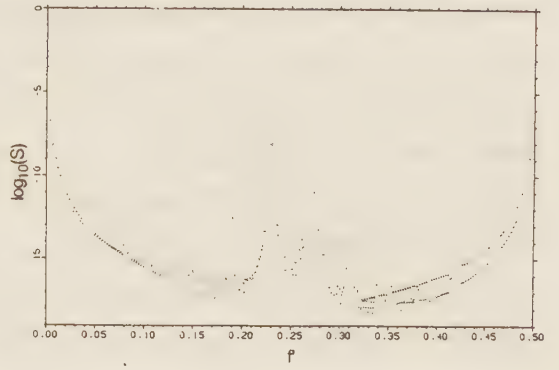
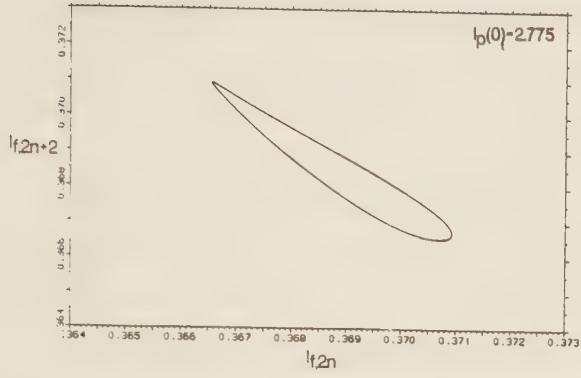
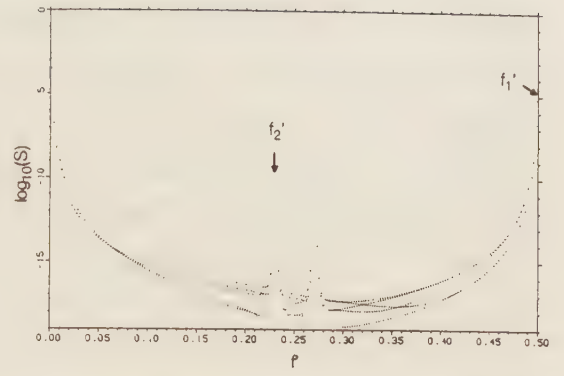
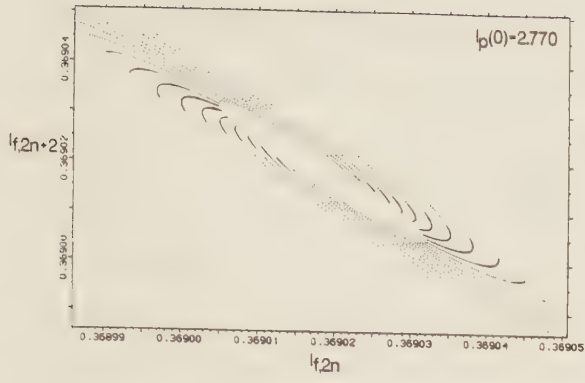
Bei $I_p(0) = 2.77$ ist der PKR knapp unter der Schwelle zur Hopf-Bifurkation. Fig. 6.20 zeigt dort eine auf den Attraktor (in dieser Darstellung ein Fixpunkt) konvergierende I_f -Folge nahe beim Attraktor (man beachte die Skala). An den 37 Spiralarmlen zeigt sich schon die Periode $\simeq 74$, die bei der Hopf-Bifurkation dann auftritt. Im Frequenzspektrum treten neben dem Peak bei der Frequenz $f_1' = 1/2$ halbaxialer Moden auch, symmetrisch um $f' = 1/4$, die Frequenzen $\simeq 34/74$ und $\simeq 40/74$ auf. O.B.d.A. bezeichnen wir die Erste mit f_2' . Im ebenfalls aufgenommenen Spektrum der LE'n näherten sich vier LE'n dem Wert null. Eine Hopf-Bifurkation ist i.a. jedoch nur mit zwei LE'n mit Wert null verbunden [39]. Der doppelte Satz weist auf die Existenz zweier instabiler Moden am Bifurkationspunkt hin. Das Phänomen erklärt sich mit dem bei der Bifurkation auftretenden Bruch der Symmetrie des Feldes E_f um $x = 0$. Der Symmetriebruch indiziert das Anwachsen einer asymmetrischen transversalen Mode. Diese treten aber durch Spiegelung um $x = 0$ immer paarweise auf. Bei $I_p(0) = 2.775$ ist der etablierte Attraktor dargestellt. Die dicht mit Punkten ausgefüllte Linie weist auf inkommensurable Frequenzen f_1' und f_2' hin. Im Fourier-Spektrum finden sich jetzt mit wachsender Ausdehnung des Attraktors auch Oberwellen der zweiten Frequenz. Erhöht man $I_p(0)$, dann verschwindet dieser Attraktor bei $I_p(0) \simeq 2.81$ und wird von einem neuen abgelöst. Dieser ist bei der Pumpintensität $I_p(0) = 2.81$ dargestellt, und läßt sich anhand seiner Orientierung und insbesondere seines Fourier-Spektrum klar von ersterem unterscheiden. Zu erwähnen ist noch, daß im Bereich $2.805 \leq I_p(0) \leq 2.81$ Hysterese auftritt. Reduziert man nämlich $I_p(0)$ vom Wert 2.81, dann verschwindet der zweite Attraktor erst bei $I_p(0) \simeq 2.805$, und der erste erscheint wieder. Unter weiterer

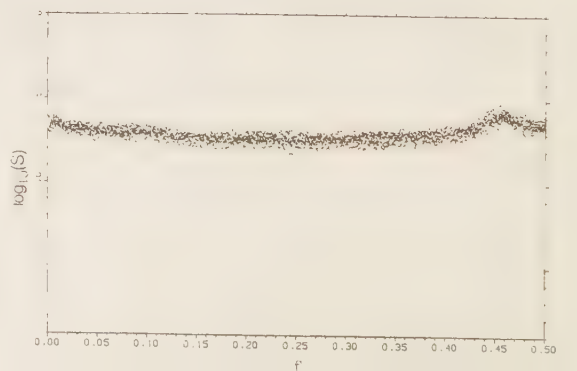
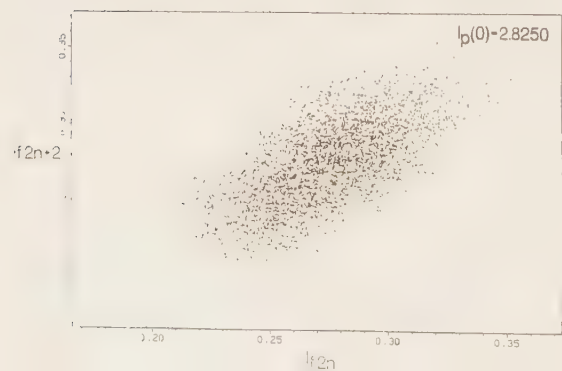
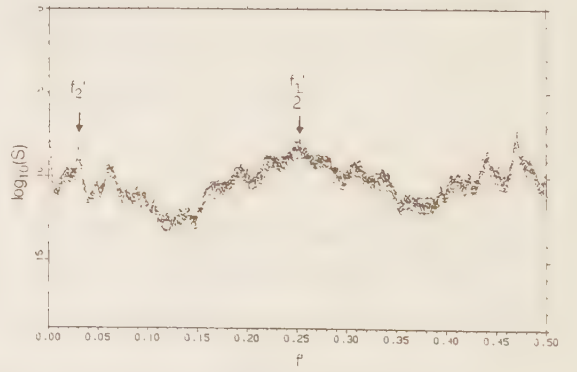
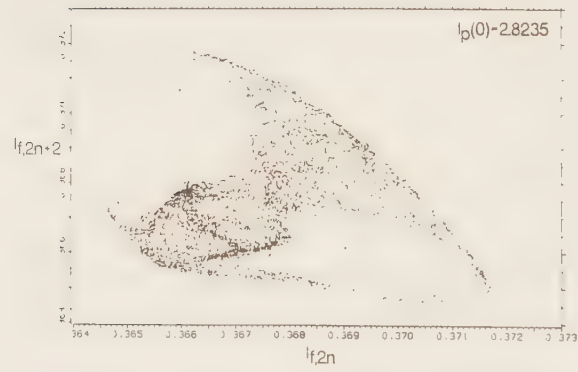
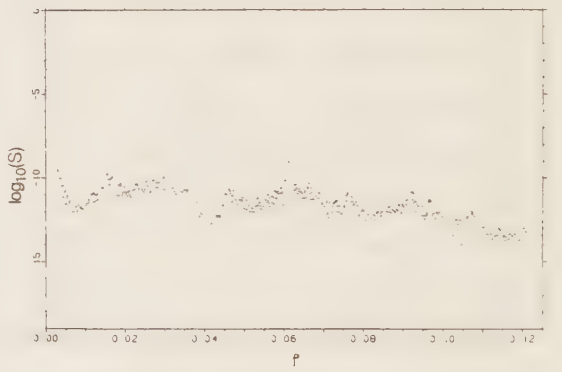
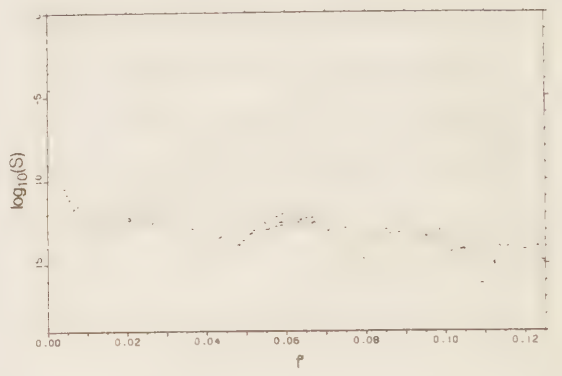
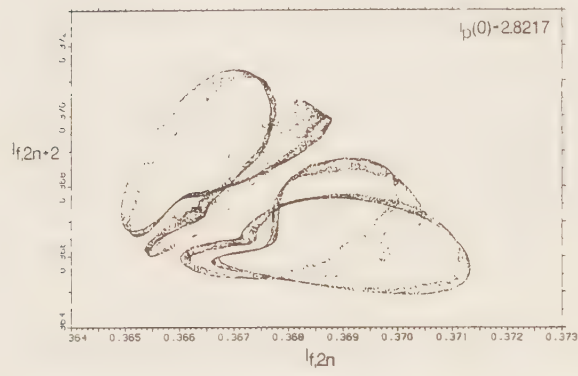
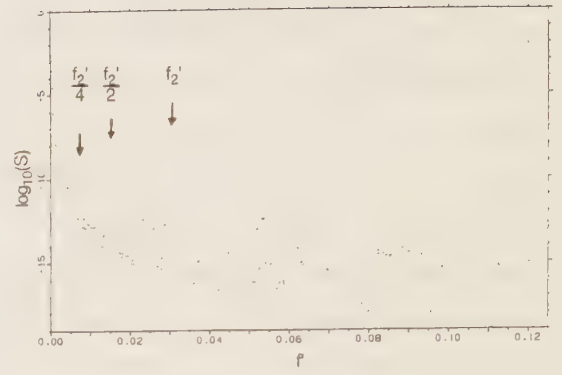
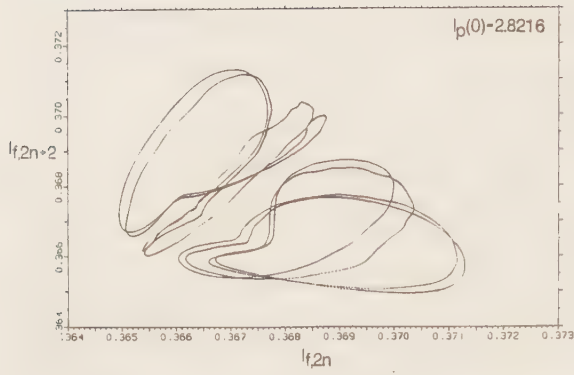
Erhöhung von $I_p(0)$ treten nacheinander eine Periodenverdopplung der Frequenz $f_1' = 1/2$ und zwei der Frequenz $f_2' \simeq 0.03$ auf. Die einzelnen Stadien sind bei $I_p(0) = 2.819$, 2.8205 und 2.8216 dargestellt. Die Periodenverdopplungssequenz in beiden Frequenzen bricht dann bei $I_p(0) \simeq 2.8217$ ab, wo chaotisches Verhalten erscheint. Bei $I_p(0) = 2.8217$ sind über dem Rauschuntergrund, der vom Chaos herrührt, noch die zweite Subharmonische der Frequenz f_1' und die Oberwellen der vierten Subharmonischen von f_2' präsent. Diese Oberwellen sind dann bei $I_p(0) = 2.8218$ bereits verschwunden. Der allmähliche Übergang zu vollentwickeltem Chaos bricht bei $I_p(0) \simeq 2.8250$ durch einen Sprung auf einen hochdimensionalen Attraktor ab; hierbei verschwindet auch die 2-Periodizität, d.h. der Attraktor besteht nur noch aus einem Blatt (man beachte die Skala). Während der Attraktor bei $I_p(0) \simeq 2.8235$ einen positiven LE und die Dimension $D_L \simeq 4.2$ hatte, weist dieser bei $I_p(0) = 2.8250$ neun positive LE'n und die Dimension $D_L \simeq 19.2$ auf. Ein im Fall $u = 3$ gefundener Bereich, in dem das System zwischen beiden Attraktoren pendelt, konnte nicht identifiziert werden.

6.5. Qualitative Diskussion der PKR-Dynamik

In den vorangegangenen zwei Abschnitten wurde die Dynamik eines PKR als Funktion der Pumpintensität des PKS und der Breite der Apertur am konventionellen Spiegel beschrieben. Hier wird ein qualitatives Verständnis des beschriebenen Verhaltens entwickelt. Zuerst konzentrieren wir uns auf die Rolle der Pumpintensität $I_p(0)$. Mit $I_p(0)$ wächst die Nichtlinearität in der Reflektionscharakteristik des PKS an, was man aus Gl. (3.32) ersieht, nachdem mittels der Gln. (3.29) und (3.30) ϕ_0 und ϕ_+ durch E_f ersetzt worden sind. Als Folge führen transversale Modulationen des auf den PKS einfallenden Feldes $E_f(x)$ zu immer stärkeren Modulationen im reflektierten Feld $E_b(x)$. Damit verbunden wächst mit $I_p(0)$ die Komplexität der Resonatorfelder und schlägt sich in der beobachteten Zunahme der Dimension chaotischer Attraktoren

Fig. 6.20: Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario ins Chaos: Die Figuren in der linken Spalte zeigen bei jeweils festgehaltener Pumpintensität ein Blatt des P2-Attraktors in R^2 eingebettet (mit Ausnahme der letzten Figur). In der rechten Spalte finden sich die Fourier-Spektren der korrespondierenden $I_{f,n}$ -Serien. Die Intensitäten sind auf $I_p(0)$ und die Frequenzen im Spektrum sind auf $1/t_c$ normiert. Das Auftreten von fünf Linien im Untergrund des Spektrums ist ein FFT-Effekt und hat keine Signifikanz.





nieder. Die Apertur am konventionellen Spiegel wirkt dem entgegen. Die transversale Modulation des für die Rückkopplung auf den PKS relevanten Teils von E_b wird infolge der Ausblendung höherer transversaler Fourier-Komponenten an der Apertur mit Breite u ausgeschmiert, mit verbleibenden transversalen Modulationen auf einer Längenskala $\geq 1/u\mathcal{F}_r$. Lose gesprochen dürfte daher eine Verkleinerung der Apertur den Teil des Phasenraums reduzieren, der dem System effektiv zur Verfügung steht. In numerischen Simulationen findet man dann auch bei verringerter Aperturbreite u eine reduzierte Dimension der chaotischen Attraktoren, und insbesondere tritt kein hochdimensionaler Attraktor mehr spontan auf. Der beobachtete Übergang eines Ruelle-Takens-Newhouse- (RTN) Szenarios in ein Feigenbaum-Szenario, wenn u reduziert wird, fügt sich in dieses Bild ein: Während ein RTN-Szenario einen mindestens zweidimensionalen Phasenraum benötigt (außer in Abbildungen auf einer geschlossenen Linie; in diesem Fall muß sich das System allerdings vollständig mit einer Winkel- oder Phasenvariablen beschreiben lassen), tritt das Feigenbaum-Szenario schon in Systemen mit eindimensionalem Phasenraum auf. Die mit abnehmendem u wachsende Schwelle für den Einsatz von Chaos läßt sich mit der, durch die teilweise Ausblendung des im Resonator umlaufenden Feldes, reduzierten Rückkopplung von E_b auf den PKS erklären. Schließlich erscheinen im nachhinein die in chaotischen Signalen nahe am Akkumulationspunkt der Periodenverdopplungssequenz gefundenen periodischen Phasen als Vorboten des RTN-Szenarios bei großer Aperturbreite u .

Es bleibt noch anzumerken, daß in allen vier Konfigurationen, die sich aus den Spiegelgeometrien $L/R = .9$ und 1 und den beiden Signaturen des Brechungsindex ergeben, im wesentlichen dasselbe Verhalten fand. Alle wiesen bei kleiner Apertur ein Feigenbaum-Szenario ins Chaos auf, das bei vergrößerter Apertur schließlich von einem RTN-Szenario abgelöst wurde. Im Falle eines defokussierenden Mediums und $L/R = 1$ wurde auch das in Kap. 2.2.4 beschriebene modifizierte RTN-Szenario gefunden, in dem sich die zweite der zunächst inkommensurablen Frequenzen f_1' und f_2' vor dem Übergang zum Chaos auf die erste synchronisiert hat. Im Vergleich zu fokussierenden Medien tritt bei defokussierenden Medien das RTN-Szenario schon bei kleineren Aperturen auf und die Schwellenintensität für den Einsatz von chaotischer Dynamik ist leicht erhöht. Dasselbe Verhalten findet sich auch, wenn man die Spiegelgeometrie $L/R = 1$ mit $L/R = .9$ vergleicht.

7. DYNAMISCHE LÖSUNGEN: SCHNELLES MEDIUM

In diesem Kapitel gehen wir der Frage nach, ob die in Kap. 6 untersuchte Dynamik eines PKR mit instantanem Medium mit der eines PKR im Grenzfall $t_c \rightarrow \infty$ übereinstimmt. Wie in Kap. 6 bereits bemerkt, ist dies der Fall, falls in den Lösungen der vollen PKR-Gln. (3.29) - (3.33) keine Instabilitäten auf einer gegen t_c kurzen Zeitskala auftreten. Die Frage, ob solche Instabilitäten existieren oder nicht, kann i.a. nicht analytisch beantwortet werden. Wir werden daher in Kap. 7.2 exemplarisch die Dynamik eines PKR in der in Kap. 6.3.1. betrachteten Konfiguration, in der ein Feigenbaum-Szenario auftrat, für den Wert $t_c = 10$ simulieren und mit den Resultaten in Kap. 6 vergleichen. Zunächst untersuchen wir jedoch in Kap. 7.1 die Stabilität stationärer PKR-Lösungen für $t_c \gg 1$. Die instabilen Eigenmoden der linearisierten Dynamik werden sich dann in Kap. 7.2 als wertvolle Hilfsmittel erweisen, um das numerisch ermittelte Verhalten des PKR zu beschreiben.

7.1. Lineare Stabilitätsanalyse

Führt man die zu Kap. 6 analogen Simulationen mit endlichem t_c aus, so findet man bei hinreichend niedriger Pumpintensität $I_p(0)$ ebenfalls eine stationäre Lösung der PKR-Dynamik, die bei Erhöhung von $I_p(0)$ schließlich instabil wird und eine periodische Modulation wachsender Amplitude aufweist. Bevor wir das Verhalten des PKR beim Einsatz der Instabilität untersuchen, bringen wir die PKR-Gln. (3.29) - (3.33) in eine kompaktere Form. Hierzu setzen wir eine Kombination der Gln. (3.32) und (3.33) in die Gln. (3.29) und (3.30) ein und erhalten in dem in Kap. 6 betrachteten Fall vernachlässigter transversaler Diffusion ($\ell_T = 0$, $\mu = 0$)

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x,t) = -\Phi(x,t) + \mathcal{N}[\Phi(t-1)](x) , \quad (7.1)$$

wobei $\Phi(x,t) = (\Phi_0(x,t), \text{Re}(\Phi_+(x,t)), \text{Im}(\Phi_+(x,t)))$ ein reelles, dreidimensionales Vektorfeld und $\mathcal{N}$ ein nichtlinearer Operator auf dem Raum der Vektorfelder Φ ist. Die Zeit t ist auf die Resonatorumlaufzeit normiert.

Als ersten Schritt in der Stabilitätsanalyse einer stationären Lösung Φ_s der Gl. (7.1)

setzen wir $\Phi(x,t) = \Phi_s(x) + \psi(x,t)$, wobei $\psi(x,t)$ eine kleine Störung repräsentiert, in Gl. (7.1) ein und erhalten nach der Linearisierung der Gleichung um Φ_s

$$\frac{1}{t_c} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\psi(x,t) + \mathcal{N}_1(\Phi_s)[\psi(t-1)](x) . \quad (7.2)$$

Hier ist $\mathcal{N}_1(\Phi_s)$ der um Φ_s linearisierte Operator $\mathcal{N}$ und wirkt auf ψ . Wir nehmen an, daß $\mathcal{N}_1$ ein vollständiges, diskretes Eigenfunktionensystem (ψ_m) mit den Eigenwerten (λ_m) , $m \in \mathbb{N}$, besitzt. Man beachte, daß aufgrund der Realität von $\mathcal{N}_1$ mit λ_m , ψ_m jeweils auch λ_m^* , ψ_m^* auftreten. Setzt man die Entwicklung von ψ nach den Eigenfunktionen ψ_m ,

$$\psi(x,t) = \int_C d(\text{Re}\nu) d(\text{Im}\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \Psi(m,\nu) \psi_m(x) e^{-i\nu t} \quad (7.3)$$

in Gl. (7.2) ein, dann erhält man für die ψ_m korrespondierenden komplexen Frequenzen $\nu_m = \omega_m + i g_m$ die Selbstkonsistenzbedingung

$$\frac{\lambda_m \exp[-g_m + i\omega_m]}{1 + g_m/t_c - i\omega_m/t_c} = 1 . \quad (7.4)$$

Jede Eigenmode von Gl. (7.2) ist reell und setzt sich daher aus zwei komplexkonjugierten Gliedern der Entwicklung (7.3) zusammen. O.B.d.A. nehmen wir somit im folgenden $\omega_m \geq 0$ an.

Das Verhalten des PKR an der Stabilitätsgrenze von Φ_s läßt sich jetzt für hinreichend großes t_c aus den Simulationsergebnissen in Kap. 6 ermitteln: Die stationäre Mode wurde dort immer von einer P2-Lösung abgelöst. Das zeitliche Fourierspektrum von P2-Lösungen setzt sich aus den ungeraden harmonischen Frequenzen $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$, halbaxialer Moden zusammen. Dies sind auch die Frequenzen der Eigenmoden, die zur P2-Instabilität führen. Sie liefern in Gl. (7.4) alle einen Faktor -1 (Gl.(7.4) beschreibt auch die Eigenmoden eines instantan reagierenden Mediums, nachdem man den Nenner gleich eins gesetzt hat). Allen instabilen Eigenmoden korrespondiert daher derselbe reelle Eigenwert λ_m , den wir von jetzt ab mit λ_1 bezeichnen (wir nehmen an, daß λ_1 kein entarteter Eigenwert von $\mathcal{N}_1$ ist). Ganz analog zum Verstärkungsfaktor G in Gl. (4.12) muß λ_1 in der Umgebung der Stabilitätsgrenze eines PKR mit instantan reagierendem

Medium eine reelle abnehmende Funktion der Pumpintensität $I_p(0)$ sein, die an der Stabilitätsgrenze ($g_1 = 0$) exakt den Wert $\lambda_1 = -1$ hat. Jetzt ist zu beachten, daß der Grenzübergang $t_c \rightarrow \infty$ in Gl. (7.4) kontinuierlich ist und die Selbstkonsistenzbedingung für den eben betrachteten PKR mit instantan reagierendem Medium liefert. Berücksichtigt man, daß wir für $\mathcal{N}_1$ ein diskretes Spektrums postuliert haben und die Eigenwerte λ_m unabhängig von t_c sind, dann wird sofort klar, daß λ_1 für hinreichend große Werte von t_c in der Umgebung der jeweiligen Stabilitätsgrenze alle für die Stabilitätsanalyse relevanten Eigenmoden von Gl. (7.2) beschreibt. Aus den ersten Gliedern einer Potenzreihenentwicklung der λ_1 -Lösungen von Gl. (7.4) nach $1/t_c$,

$$g_{n,1} = \ln(-\lambda_1) - \ln(-\lambda_1) \frac{1}{t_c} - \left[\frac{1}{2}(2n+1)^2\pi^2 - \frac{1}{2}(\ln(-\lambda_1))^2 + \ln(-\lambda_1) \right] \frac{1}{t_c^2} , \quad (7.5)$$

und

$$\omega_{n,1} = (2n+1)\pi \left(1 - \frac{1}{t_c} \right) , \quad (7.6)$$

ersieht man dann, daß sich endliches t_c in mehrfacher Weise manifestiert:

(1) Die Instabilitätsschwelle ist zu höheren Pumpintensitäten $I_p(0)$ hin verschoben ($\lambda_1 < -1$).

(2) die Entartung in der Verstärkung der verschiedenen Moden ist aufgehoben; die Verstärkung $g_{n,1}$ nimmt mit n bzw. mit der Verstimmung $\omega_{n,1}$ gegen die Pumpfrequenz ω_0 ab.

(3) Die Verstimmung $\omega_{n,1}$ der Moden gegen die Pumpfrequenz ω_0 ist reduziert.

Wir weisen hier noch auf eine Konsequenz von (2) hin: Während die P2-Lösung im Falle eines instantanen Mediums unmittelbar oberhalb der Instabilitätsschwelle abwechselnd zwischen zwei benachbarten Zuständen hin und herspringt, erwartet man dort bei endlichem t_c , daß nur die Mode bei der Frequenz $\omega_{1,1}$ angeregt ist und eine sinusförmige Modulation von Φ_g mit kleiner Amplitude auftritt.

7.2. Simulation

Wir haben Gl. (7.1) in der in Kap. 6.3.1 betrachteten PKR-Konfiguration ($n_2 > 0$, $L/R = .9$, $u = 1$) für $t_c = 10$ mit einem Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung integriert. In typischen Beispielen erwiesen sich die numerischen Lösungen für Zeitschrittweiten $\Delta t \leq .01$ als unabhängig von Δt . Die Integration wurde daher mit $\Delta t = .01$ durchgeführt. Man beachte, daß die Mediumreaktionszeit $\tau (=1/t_c$ in der augenblicklich verwendeten Zeitnormierung) die relevante Zeitskala für die Schrittweite des Integrationsverfahrens ist, da, in Vorwegnahme der Ergebnisse, Gl. (7.1) Instabilitäten auf der Zeitskala τ zeigt. Der Rechenaufwand für die Simulation eines Resonatorumlaufts nimmt daher linear mit t_c zu und ist beim hier verwendeten Runge-Kutta-Verfahren um den Faktor $\simeq 20t_c$ gegenüber der Iteration der diskreten Abb. (6.1) erhöht. Bedenkt man, daß die Integration über 1000 Resonatorumläufe ungefähr 10 Minuten CPU-Zeit eines Cyber-205 Vektorrechners benötigt hat, dann wird klar, daß man bei der Simulation von Gl. (7.1) selbst für mäßig großes t_c an die Grenzen heutiger Computer stößt.

In den Simulationen wurde Gl. (7.1) nacheinander bei den Pumpintensitäten $I_p(0) = 2.4, 2.5, \dots, 3.8$ und 4.2 jeweils solange iteriert, bis keine Transienten mehr sichtbar waren. Beim Übergang zur jeweils nachfolgenden Pumpintensität wurde $I_p(0)$ nach jedem Δt -Zeitschritt um den Betrag 10^{-4} erhöht. Aufgenommen wurden die Intensität im Resonator $I_f(t)$ (Fig. 7.1a und 7.1d; siehe Gl. (6.11)), das Fourier-Spektrum von $I_f(t)$ (Fig. 7.1b) und das komplexe Feld $E_b(0,t)$ (Fig. 7.1c). Letzteres wurde aufgezeichnet, indem nach jedem Zeitschritt Δt der Imaginärteil gegen den Realteil von $E_b(0,t)$ aufgetragen wurde und liefert eine zweidimensionale Einbettung des Attraktors. Im Prinzip enthält die $I_f(t)$ -Kurve zwar den vollen Informationsgehalt der Dynamik des PKR (z.B. lassen sich aus ihr Einbettungen der Attraktoren gewinnen), manche qualitative Änderungen im Verhalten des Systems - z.B. ein Bruch der Symmetrie des Resonatorfeldes um $x = 0$ - lassen sich jedoch in anderen Darstellungen ggf. besser erkennen. Aus diesem Grund wurden immer wieder auch transversale Profile des Feldes E_b aufgenommen. Im folgenden sind die Simulationsergebnisse zusammengefaßt:

Bei der Pumpintensität $I_p(0) = 2.4$ haben wir die Lösung bei der Pumpfrequenz ω_0 aus Kap. 6 wiedergefunden, jedoch ohne die in Kap. 6.2 besprochene Phasenunbestimmtheit. Für $I_p(0) = 2.5$ wies das Feld im Resonator bereits eine periodische Modulation mit der Periode $\simeq 2.2$ auf (Fig. 7.1a). Das Fourierspektrum in Fig. 7.1b weist darauf hin, daß eine fast reine Anregung der Eigenmode aus Kap. 7.1 mit der höchsten Verstärkung vorliegt ($\omega_{1,1}$ -Mode). Fig. 7.1c zeigt eine

Modulationsamplitude $\simeq \pi/3$ in der Phase $\phi_b(0,t)$ des Feldes $E_b(0,t)$, während seine Amplitude $|E_b(0,t)|$ nur wenig oszilliert. Weiteres Erhöhen der Pumpintensität lieferte bis $I_p(0) = 3.4$ eine periodische Modulation des Feldes im Resonator mit im wesentlichen unveränderter Periodenlänge, aber zunehmender Anregung von Moden bei den Harmonischen der Frequenz $\omega_{1,1}$ (siehe Fig. 7.1a und 7.1b). Man beachte, daß die Fourier-Spektren in Fig. 7.1b aufgrund der Absolutquadratbildung bei der Berechnung von I_f selbst bei der ausschließlichen Anregung von Feldmoden bei ungeradzahlig harmonischen Frequenzen von $\omega_{1,1}$ auch Beiträge bei geradzahlig harmonischen Frequenzen enthalten. Für $I_p(0) = 3.5$ stellt sich zunächst eine periodische Modulation des Resonatorfeldes ähnlich der bei $I_p(0) = 3.4$ gefundenen ein, der aber eine zweite Modulation mit langsam wachsender Amplitude und längerer Periode überlagert ist. Nach ca. 600 Resonatorumläufen geht der PKR dann rasch in eine chaotische Bewegung mit dem Wert 0.08 des größten Lyapunov-Exponenten über. Das in Fig. 7.1d über einen Zeitraum von 160 Resonatorumläufen im chaotischen Bereich aufgezeichnete Verhalten von $I_f(t)$ wurde numerisch über weitere 160 Resonatorumläufe verfolgt und unverändert vorgefunden und erlaubt zusätzlich zur Periode $\simeq 2.2$ die Identifikation einer zweiten Periode $\simeq 26$. Eine dritte Periode läßt sich aus Fig. 7.1c entnehmen: Dort ist über einen Zeitraum von 40 Resonatorumläufen eine Trajektorie auf dem chaotischen Attraktor aufgezeichnet. Der ganze Attraktor ist noch nicht zu sehen, dafür konnte aber bei seiner Aufzeichnung beobachtet werden, daß die ins Zentrum gerichteten Lappen in der in der Figur eingezeichneten Reihenfolge nacheinander durchlaufen werden. Nach weiteren ca. 15 Resonatorumläufen dürfte die Ausgangssituation wieder näherungsweise erreicht sein, was eine Periode $\simeq 55$ indiziert. Die lange transiente Phase bis zum Einsatz der chaotischen Dynamik ließ eine genauere Studie des Szenarios ins Chaos im Bereich $3.4 < I_p(0) < 3.5$ nicht zu. Die drei identifizierten Perioden weisen jedoch auf ein RTN-Szenario (falls zwei Perioden kommensurabel sind), oder auf ein Szenario mit Dreifrequenz-Quasiperiodizität hin. Wir haben die Pumpintensität weiter bis $I_p(0) = 3.8$ erhöht und keine qualitative Änderung in der PKR-Dynamik gefunden. Eine letzte Simulation bei $I_p(0) = 4.2$ zeigt dann aber deutliche Unterschiede in den korrespondierenden Bildern in Fig. 7.1. Es sei noch erwähnt, daß der größte Lyapunov-Exponent im Fall $I_p(0) = 4.2$ um den Faktor $\simeq 4,5$ größer ist als bei $I_p(0) = 3.5$ und den Wert 0.35 hat. Ferner wurde in keiner Simulation ein Symmetriebruch um $x = 0$ registriert und keine charakteristische Veränderung in den transversalen Feldprofilen beim Übergang ins Chaos festgestellt.

Die hier beschriebenen Simulationsergebnisse können nur so gedeutet werden, daß das Modell eines PKR mit instantanem Medium in Kap. 6 den PKR im Grenzfall

$t_c \rightarrow \infty$ nicht beschreibt. Wie nach der Stabilitätsanalyse in Kap. 7.1 erwartet, weisen die Simulationen in Kap. 6.3.1 und Kap. 7 bei vergleichbarer Pumpintensität eine dynamische Instabilität auf. Im Fall eines endlichen t_c hat unmittelbar oberhalb der Instabilitätsschwelle lediglich die Eigenmode der linearisierten Dynamik (7.2) bei der Frequenz $\omega_{1,1}$ halbaxialer Moden positive Verstärkung und ist allein angeregt. Im anderen Fall sind dagegen auch die Eigenmoden bei den Frequenzen $\omega_{n,1}$, $n \in \mathbb{N}$, angeregt. Bei weiterer Erhöhung der Pumpintensität mögliche Dynamiken eines PKR mit endlichem t_c lassen sich mit folgendem vereinfachten Bild erfassen. Mit wachsender Pumpintensität erreichen Eigenmoden zum Eigenwert λ_1 bei immer höheren Frequenzen $\omega_{n,1}$ positiver Verstärkung; ebenso wächst auch die Amplitude der Anregungen. Ist die in Folge einsetzende nichtlineare Kopplung zwischen den Eigenmoden so geartet, daß diese gerade in einer Weise angeregt werden, daß sich die für die Lösungen in Kap. 6 charakteristischen Plateaus ausbilden (wenn sie gegen die Zeit aufgetragen werden), dann würde das Modell in Kap. 6 den Grenzfall $t_c \rightarrow \infty$ korrekt beschreiben. Tatsächlich erfolgen die Anregungen aber in einer Weise, daß sich selbst rudimentäre Formen dieser Plateaus kaum identifizieren lassen. Ein weiterer signifikanter Unterschied zwischen den verglichenen Simulationen in Kap. 6 und 7 ist ihr unterschiedlicher Weg ins Chaos. Im ersten Fall findet sich ein Feigenbaum-Szenario, während im zweiten keine einzige Periodenverdopplung auftritt und ein RTN-Szenario oder eine Route über Dreifrequenz-Quasiperiodizität vorzuliegen scheint. In beiden Fällen ist der Übergang zu chaotischer Dynamik von keiner signifikanten Änderung der transversalen Feldprofile im Resonator begleitet, scheint also nicht von transversalen Kopplungsmechanismen determiniert zu sein. Im Gegensatz hierzu ist dies beim in Kap. 6.4 besprochenen RTN-Szenario der Fall, in dem das Erscheinen der zweiten Frequenz mit einem Symmetriebruch um $x = 0$ verbunden ist.

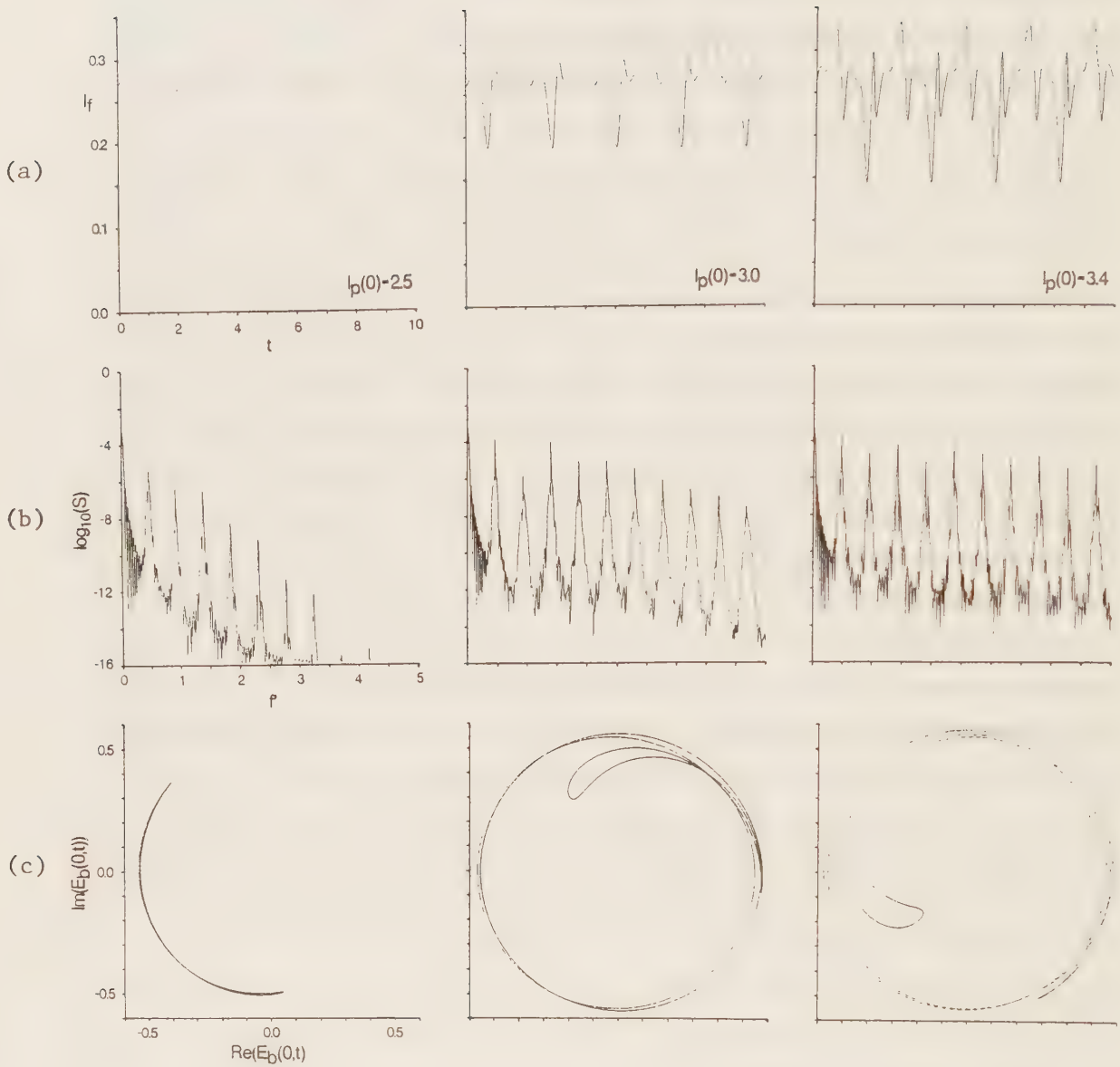
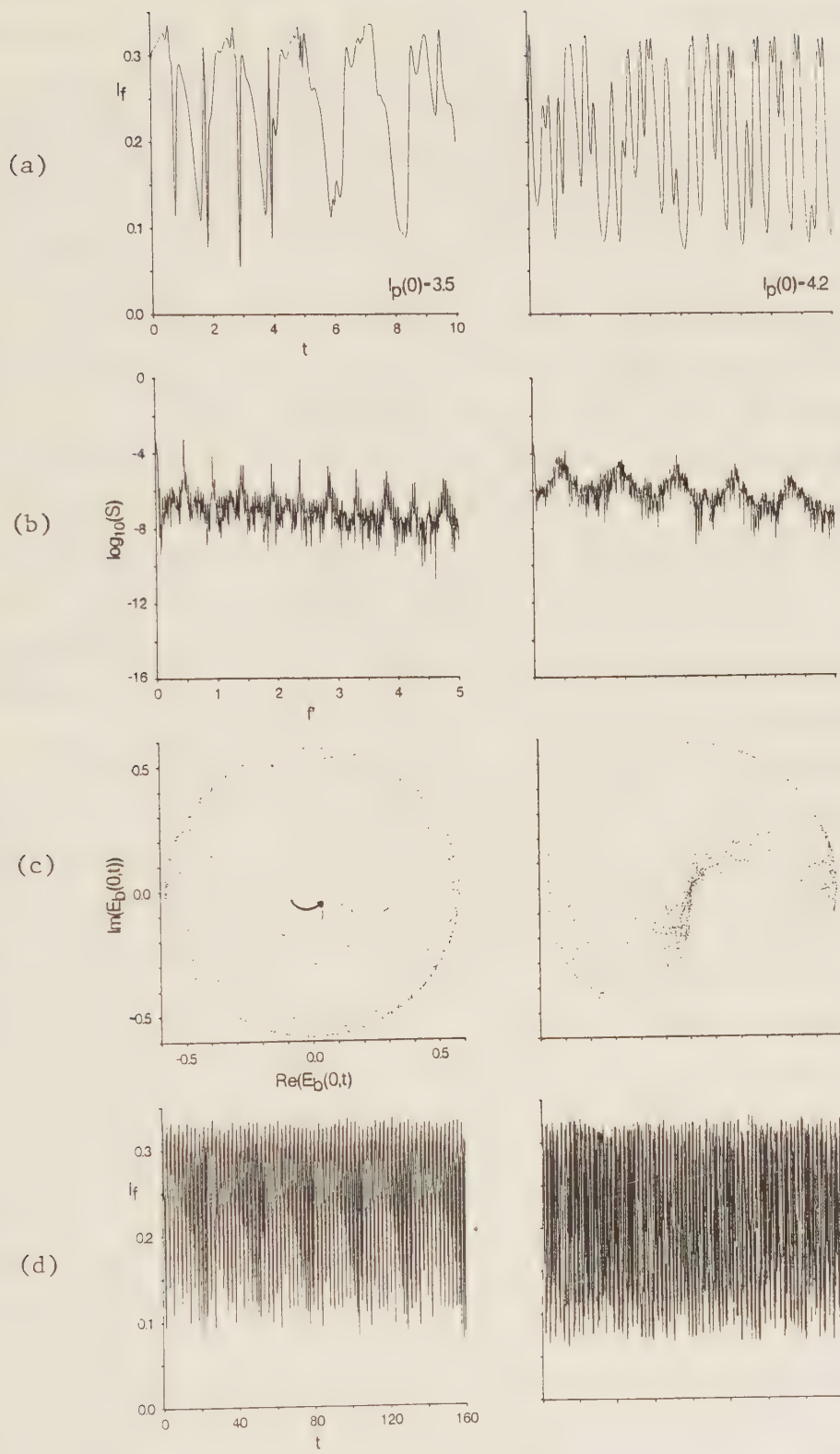


Fig. 7.1: Auf dem Weg ins Chaos zeigen: (a) und (d) $I_f(t)$ -Zeitserien, (b) korrespondierende Fourier-Spektren aus Zeitserien der Länge $160t_c$ und (c) in Zeitschritten $0.01t_c$ über den Zeitraum $40t_c$ aufgenommene Felder $E_b(0,t)$. Die Intensitäten sind auf $I_p(0)$, die Feldamplituden auf $I_p(0)^{1/2}$, die Zeit auf t_c und die Fourier-Frequenzen auf $1/t_c$ normiert. Die in regelmäßigen Abständen im Untergrund des Fourier-Spektrums auftretenden Spitzen sind ein FFT-Effekt (Routine mit der Spektren berechnet werden) und haben keine Signifikanz.



8. ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben die Theorie eines PKR entwickelt, in dem der PKS ein diffusives, Kerrartiges Medium und das Verhältnis von Resonatorumlaufzeit zu Reaktionszeit des Mediums beliebig war. Sie beschränkte sich auf eine Geometrie, in der der Streuprozess der Felder im PKS im Raman-Nath-Bereich lag, aber schloß lineare Absorption und die Abschwächung der Pumpstrahlen durch die Streuprozesse voll ein. Die Felder wurden als in einer transversalen Richtung eben angenommen. In einer Ebene-Wellen-Analyse fanden sich vielfache axiale stationäre Lösungen. Eine anschließende lineare Stabilitätsanalyse, die nur axiale Störungen berücksichtigte, sagte für ein schnelles Medium Bereiche stabiler Lösungen, aber bei höheren Pumpintensitäten auch Instabilitäten bei der Frequenz halbaxialer Moden voraus. Im Falle eines trägen Mediums waren dagegen alle Lösungen auf den Ästen der Charakteristik mit positiver Steigung stabil. Der Einschluß transversaler Störungen veränderte die Situation völlig: Alle stationären Lösungen wurden instabil und die transversale Struktur des Feldes im PKR hing an der Resonatorschwelle i.a. von der Diffusionsstärke ab. Dies zeigt, daß eine Beschreibung der PKR-Dynamik transversale Effekte berücksichtigen muß.

In numerischen Studien von PKR'n, die Lösungen mit niedriger Beugung zulassen und somit näherungsweise die Bedingungen des Ebene-Wellen-Modells erfüllen, fanden wir zwei Arten von Instabilitäten: In einer Konfiguration mit einem defokussierenden Medium wurde eine Modulationsinstabilität nachgewiesen - dieser Instabilitätstyp wurde in der transversalen Stabilitätsanalyse erfaßt-, während in einer anderen Konfiguration mit einem fokussierenden Medium eine Instabilität auftrat, die der nichtlinearen Kopplung starker Beugung unterliegender Eigenmoden der linearisierten PKR-Gleichungen zugeschrieben wurde. Das Auftreten der zweiten Instabilität weist darauf hin, daß eine Ebene-Wellen-Analyse nicht alle transversalen Instabilitäten an der Resonatorschwelle erfaßt. Aus einer zusätzlichen Simulation von Resonatorgeometrien, die Lösungen mit hoher Beugung implizieren, schließen wir, daß der Bereich stabiler Lösungen bei der Pumpfrequenz mit der Stärke der Beugung (Modenselektion) anwächst, die von der Resonatorgeometrie vorgegeben wird. Er wächst zudem mit der Reaktionszeit des Mediums an, wie sich übereinstimmend aus den Resultaten der axialen Stabilitätsanalyse und den Simulationen für verschiedene Reaktionszeiten des Mediums erkennen läßt. Bei hinreichend großer Pumpintensität (Nichtlinearität) werden diese Lösungen jedoch selbst bei trägem Medium und hoher Beugung im Resonator schließlich instabil.

Ein PKR mit instantan reagierendem Medium zeigte generell eine Unbestimmtheit in der Phase des Resonatorfeldes, sobald dessen Amplitude eine periodische Bewegung mit geradzahlgiger Periode aufwies. Dennoch erwies er sich als geeignet, um an einem einzigen unendlichdimensionalen System lediglich durch Verändern eines leicht zugänglichen Parameters (Blendenbreite) verschiedene Übergänge in niedrigdimensionales Chaos und den anschließenden Weg zu hochdimensionalen chaotischen Attraktoren zu studieren. In Simulationen fast konfokaler und konfokaler Konfigurationen ließen sich drei verschiedene Routen ins Chaos unterscheiden. Bei wenig geöffneter Blende fand sich als Funktion der Pumpintensität des PKS ein Feigenbaum-Szenario in niedrigdimensionales Chaos, dem ein kontinuierlicher Übergang zu hochdimensionalem Chaos folgte. Öffnete man die Blende, dann blieb zunächst das Feigenbaum-Szenario erhalten, aber der Übergang zu hochdimensionalem Chaos wurde diskontinuierlich. Schließlich brach das Feigenbaum-Szenario mit dem Erscheinen einer zweiten inkommensurablen Frequenz vorzeitig ab und der PKR folgte einem Ruelle-Takens-Newhouse-Szenario. Eine modifizierte Form dieses Szenarios, in der vor dem Einsatz von Chaos beide Frequenzen kommensurabel wurden, trat ebenfalls auf. Im Feigenbaum-Szenario bei kleiner Blendenöffnung schienen bei gegebener Nichtlinearität (Pumpintensität) transversale Effekte die absolute Chaotizität im Vergleich mit einer eindimensionalen Beschreibung zu reduzieren. Ebenso fanden sich in diesem Fall, im Gegensatz zu den niedrigdimensionalen Standardmodellen, an denen chaotische Attraktoren i.a. untersucht werden, deutlich inhomogene chaotische Attraktoren. Die kontinuierliche Route zu hochdimensionalem Chaos erwies sich als völlig verschieden von der von Farmer im Mackey-Glass-System gefundenen. Während im PKR sowohl die metrische Entropie (Chaotizität) als auch die Werte der Lyapunov-Exponenten mit der Dimension des Attraktors anwuchsen, ist erste im M-G-System konstant und die Lyapunov-Exponenten konvergieren gegen Null.

Die hier gewonnenen Ergebnisse tragen jedoch lediglich zum theoretischen Verständnis von Chaos bei. Beim Vergleich einer PKR-Konfiguration mit instantanem Medium, die ein Feigenbaum-Szenario aufwies, mit der ansonsten identischen Konfiguration, aber einem Verhältnis von zehn zu eins von Resonatorumlaufzeit zu Mediumreaktionszeit, fand sich zwar eine periodische Lösung bei der Frequenz halbbaxialer Moden, die aber ohne jede Periodenverdopplung ins Chaos überging. Dieses und ein ähnliches bei der Untersuchung eines Ringresonators gefundenes Resultat weisen darauf hin, daß man nicht stillschweigend davon ausgehen kann, daß der viel besser handhabbare Fall eines Resonators mit instantanem Medium den Grenzfall eines Resonators mit beliebig schnellem Medium richtig beschreibt. Nachdem sich in letzter Zeit schon die Bedeutung transversaler Effekte herausgestellt hat, scheint die verlässliche

Simulation der nichtlinearen Dynamik eines passiven optischen Resonators jetzt generell die explizite Zeitintegration der Bewegungsgleichungen unter Einschluß transversaler Effekte zu erfordern. Abgesehen von der Tatsache, daß solche Simulationen oft die Möglichkeiten heutiger Computer übersteigen (speziell bei schnellen Medien), erweist sich die korrekte Beschreibung der Dynamik nichtlinearer optischer Systeme als eine wesentlich komplexere Aufgabe als ursprünglich gedacht und in der Einleitung zu dieser Arbeit zum Ausdruck gebracht wurde.

Referenzen

- [1] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [2] Für zahlreiche Diskussionen von Chaos in viele verschiedenen Disziplinen, siehe: *Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines*, O. Gurel und O. E. Roessler, Hrgr., (New York Academy of Sciences, New York, 1979).
- [3] S. Grossmann und S. Thomae, *Z. Naturforsch.* **32A**, 1353, (1977); M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 25, (1978); P. Coullet und J. Tresser, *J. Phys. (Paris) Coll.* **39**, C5-25, (1978).
- [4] P. Manneville und Y. Pomeau, *Phys. Lett.* **75A**, 1, (1979); Y. Pomeau und P. Manneville, *Commun. Math. Phys.* **74**, 189, (1980).
- [5] S. Newhouse, D. Ruelle, und F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **64**, 35, (1978).
- [6] J. R. Ackerhalt, P. W. Milonni und M. - L. Shih, *Physics Reports* **128**, 205, (1985).
- [7] N. B. Abraham, L. A. Lugiato und L. M. Narducci, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 7, (1985).
- [8] H. M. Gibbs, *Optical Bistability, Controlling Light with Light*, (Academic Press, Orlando, Florida, 1985).
- [9] F. T. Arecchi, in: *Optical Instabilities*, R. W. Boyd, M. G. Raymer und L. M. Narducci, Hrgr., (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1986), S. 183; J. R. Tredicce, F. T. Arecchi, G. P. Puccini, A. Poggi und W. Gadomski, *Phys. Rev. A* **34**, 2073, (1986).
- [10] S. L. McCall, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 284, (1978).
- [11] R. Bonifacio und L. A. Lugiato, *Lett. Nuovo Cimento* **21**, 510, (1978).
- [12] K. Ikeda, *Opt. Commun.* **30**, 257, (1979).
- [13] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs und R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. A* **25**, 2172, (1982); M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf und D. L. Kaplan, *Phys. Rev. A* **26**, 3720, (1982); M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf und L. D. Sanders, *J. Opt. Soc. Am B* **1**, 464, (1984).
- [14] H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda und M. Matsuoka, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 109, (1983).
- [15] R. G. Harrison, W. J. Firth und I. A. Al-Saidi, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 258, (1984).
- [16] M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet, K. Tai und H. M. Gibbs, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-21**, 1404, (1985).
- [17] L. A. Orozco, A. T. Rosenberger und H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2547, (1984).

- [18] J. Firth, R. G. Harrison und I. A. Al-Saidi, Phys. Rev. A **33**, 2449, (1986).
- [19] G. C. Valley und G. J. Dunning, Opt. Lett. **9**, 513, (1984).
- [20] T. R. O'Meara, D. M. Pepper und J. O. White, in: *Optical phase conjugation*, R. A. Fisher, Hrgr., (Academic Press, New York, 1983), S. 537.
- [21] A. E. Siegman, P. A. Belanger und A. Hardy, in: *Optical phase conjugation*, R. A. Fisher, Hrgr., (Academic Press, New York, 1983), S. 465.
- [22] D. Z. Anderson, Opt. Lett. **11**, 56, (1986); B. H. Soffer, G. J. Dunning, Y. Owechko and E. Marom, Opt. Lett. **11**, 118, (1986); A. Yariv und S.- K. Kwong, Opt. Lett. **11**, 136, (1986).
- [23] B. Y. Zel'dovich, N. F. Pilipetsky und V. V. Shkunov, *Principles of Phase-Conjugation*, (Springer, Berlin, 1985).
- [24] J. Au Yeung, D. Fekete, D. M. Pepper and A. Yariv, IEEE J. Quant. Electron. **QE-15**, 1180, (1979); P. Belanger, A. Hardy and A. E. Siegman, Appl. Optics **19**, 602, (1980).
- [25] R. C. Lind and D. G. Steel, Optics Lett. **6**, 554, (1984).
- [26] Y. Jian-quan, Z. Guosheng and A. E. Siegman, Appl. Phys. **B30**, 11, (1983); A. Hardy and Y. Silberberg, J. Opt. Soc. Am. **73**, 594, (1983).
- [27] E. M. Wright, P. Meystre and W. J. Firth, Opt. Comm. **51**, 428, (1984).
- [28] Eindruck aus: *Optical phase conjugation*, R. A. Fisher, Hrgr., (Academic Press, New York, 1983).
- [29] J. Feinberg, in: *Optical phase conjugation*, R. A. Fisher, Hrgr., (Academic Press, New York, 1983), S. 445.
- [30] E. M. Wright, W. J. Firth and I. Galbraith, J. Opt. Soc. Am. **B 2**, 383, (1985).
- [31] R. H. Enns and S. S. Rangneker, Can. J. Phys. **52**, 99, (1974); M. G. Moharam and L. Young, Appl. Optics **17**, 1757, (1978); A. M. Lazaruk, Opt. Spectrosc. (USSR) **53**, 633, (1982).
- [32] A. Aceves, H. Adachihara, C. Jones, J. C. Lerman, D. W. McLaughlin, J. V. Moloney und A. C. Newell, Physica **18D**, 85, (1986).
- [33] N. W. Rozanov und V. E. Semenov, Opt. Spectros. (USSR) **48**, 59, (1980).
- [34] J. D. Farmer, Physica **4D**, 366, (1982).
- [35] M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet und H. M. Gibbs, Phys. Rev. Lett. **56**, 274, (1986).
- [36] P. Grassberger und I. Procaccia, Physica **13D**, 34, (1984).
- [37] F. A. Hopf, D. L. Kaplan, M. H. Rose, L. D. Sanders und M. W. Derstine, Phys. Rev. Lett. **57**, 1394, (1986).
- [38] W. J. Firth und E. M. Wright, Physics Lett. **92**, 211, (1982); J. V. Moloney, Phys. Rev. Lett. **53**, 556, (1984).
- [39] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos, An Introduction*, (physik verlag, 1985).

- [40] K. Ikeda, H. Daido und O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **45**, 709, (1980).
- [41] K. Ikeda, K. Kondo und O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **49**, 1467, (1982).
- [42] M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf und D. L. Kaplan, Phys. Rev. A **27**, 3200, (1983).
- [43] J. Guckenheimer und P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Appl. Math. Sci. **42**, (Springer, New York, 1984).
- [44] J. P. Eckmann, Rev. Mod. Phys. **53**, 643, (1981).
- [45] J. P. Eckmann und D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617, (1985).
- [46] V. I. Oseledec, Moscow Math. Soc. **19**, 197, (1968).
- [47] N. B. Abraham, J. P. Gollub, und H. L. Swinney, Physica **11D**, 252, (1984).
- [48] O. E. Lanford, Physica **7D**, 124, (1983).
- [49] M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. **19**, 25, 669, (1978).
- [50] P. Collet, J. P. Eckmann und H. Koch, J. Stat. Phys. **25**, 1, (1981).
- [51] C. Grebogi, E. Ott und J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett **51**, 339, (1983).
- [52] A. Libchaber, S. Fauve und C. Laroche, Physica **7D**, 73 (1983).
- [53] M. Dubois, P. Berge und V. Croquette, J. Phys. Lett. **43**, 295, (1982); D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna und E. D. Siggia, Phys. Rev. Lett. **49**, 132, (1983).
- [54] J. D. Farmer, E. Ott und J. A. Yorke, Physica **7D**, 153, (1983).
- [55] P. Grassberger, Phys. Lett. **97A**, 227, (1983).
- [56] M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia und J. Stavans, Phys. Rev. Lett. **55**, 2798, (1985); M. J. Feigenbaum, M. H. Jensen und I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **57**, 1503, (1986).
- [57] C. Shannon, Bell Tech. Jour. **27**, 379, 623, (1948).
- [58] J. L. Kaplan und J. A. Yorke in: *Lecture Notes in Mathematics*, **37**, H. O. Peitgen and H. O. Walter, Hrgr., (Springer, Berlin, 1978), S. 228.
- [59] F. Ledrappier, Commun. Math. Phys. **81**, 229, (1981); A. Douady und J. Oesterle, C. R. Acad. Sci. Paris **290A**, 1135, (1980).
- [60] D. Ruelle, Bol. Soc. Bras. Mat. **9**, 83, (1978).
- [61] F. Ledrappier und L. S. Young, Bull. Am. Math. Soc. **82**, 985, (1984).
- [62] O. A. Ladyzhenskaya, Jour. Sov. Math. **3**, 458, (1976).
- [63] J. Mallet-Paret, J. Diff. Eq. **22**, 331, (1976).
- [64] D. Ruelle, IHES preprint, (1980).
- [65] M. Lax, W. H. Louisell und W. B. Knight, Phys. Rev. A **11**, 1365, (1975).
- [66] E. M. Wright und P. Meystre, Opt. Commun. **53**, 269, (1985).
- [67] J. P. Löwenau, S. Schmitt-Rink und H. Haug, Phys. Rev. Lett. **49**, 1511, (1982).
- [68] D. J. Hagan, H. A. MacKencie, H. A. Al-Attar und W. J. Firth, Opt. Lett. **10**, 187, (1985).

- [69] H. A. MacKenzie, D. J. Hagan und H. A. Al-Attar, Opt. Commun. **51**, 352, (1984).
- [70] G. D. Bergland, IEEE Spectrum, Juli, 41, (1969).
- [71] E. A. Sziklas und A.E. Siegman, Appl. Opt. **14**, 1874, (1975).
- [72] G. Reiner, P. Meystre und E. M. Wright, J. Opt. Soc. Am. **B 2**, 982, (1985).
- [73] S. E. Newhouse in: *Progress in Mathematics*, Bd.8, (Birkhäuser, Boston, 1980), S. 1.
- [74] G. Benettin, L. Galgani und J. M. Strelcyn, Phys. Rev. **A 14**, 2338, (1976).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

Herrn Prof. P. Meystre für die Anregung und stetige Förderung dieser Arbeit,

Herrn Prof. H. Walther und Herrn Prof. P. Meystre für die Ermöglichung eines Aufenthalts am Optical Sciences Center der University of Arizona in Tucson (USA),

Herrn Dr. E. Wright und Herrn Dr. M. Belic für wertvolle Diskussionen,

Herrn Dr. H.-G. v. Garssen für seine Hilfe bei Computerproblemen,

sowie allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für das gute Arbeitsklima.

Lebenslauf

Name: Gerhard Josef Reiner
Geburtsdatum: 21. August 1958
Geburtsort: Mieterkingen
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Bildungsweg:

1965 - 1968: Grundschule Mieterkingen

1968 - 1976: Gymnasium Saulgau

1976 - 1977: Grundwehrdienst

1977 - 1984: Studium der Physik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen

1984 - 1987: Promotion bei Prof. P. Meystre am Max-Planck-Institut für Quantenoptik

